SI SE CAI XIANG
MING TI

四色猜想命题

——张尔光研究文集

张尔光◎著



全国百佳出版社
中央编译出版社
Central Compilation & Translation Press

出版人：和　龚
责任编辑：王曷灵
封面设计：中联学林



ISBN 978-7-5117-1226-4

9 787511 712264 >

定 价：29.00元

SI SE CAI XIANG
MING TI

四色猜想命题

——张尔光研究文集

张尔光◎著



全国百佳出版社
中央编译出版社
Central Compilation & Translation Press

图书在版编目（CIP）数据

四色猜想命题：张尔光研究文集 / 张尔光著．—
北京：中央编译出版社，2012.4
ISBN 978-7-5117-1226-4

Ⅰ.①四… Ⅱ.①张… Ⅲ.①信息论—数学理论
—文集 Ⅳ.①O236-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 271018 号

四色猜想命题：张尔光研究文集

出 版 人：和　龚
责任编辑：王葛灵
责任印制：尹　珺
出版发行：中央编译出版社
地　　址：北京西城区车公庄大街乙 5 号鸿儒大厦 B 座（100044）
电　　话：（010）52612345（总编室）（010）52612365（编辑室）
（010）66161011（团购部）（010）52612332（网络销售）
（010）66130345（发行部）（010）66509618（读者服务部）
网　　址：www. cctpbook. com
经　　销：全国新华书店
印　　刷：三河市华东印刷有限公司
开　　本：710 毫米×1000 毫米　1/16
字　　数：171 千字
印　　张：9.5
版　　次：2012 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：29.00 元

本社常年法律顾问：北京大成律师事务所首席顾问律师　鲁哈达
凡有印装质量问题，本社负责调换，电话：010－66509618

写在前面的话

要破解一个数学命题，首先要读懂命题，正确解读命题，才能谈得上正确破解命题。四色猜想命题，是一个典型的被事物现象遮住了事物本质的命题。想要破解它，首先要读懂它，正确解读它。

数学家 K. 阿沛尔说过：“四色问题的一个简短证明有朝一日会被发现，甚至被一位因此而一举成名的天才高中生所发现。”阿沛尔这段话透露出这么一层意思：四色问题是一个应用高中数学知识就可破解的问题。基于这种理解，可以说，破解四色猜想命题，数学知识并不是第一重要的知识能力，而观察事物能力和分析事物能力才是第一重要的知识能力。这是由四色猜想命题来自于地图着色现象这个事实所决定的。从“地图着色现象”中找到它的规律性东西，这是不可绕过去的首要前提，其次才是如何用数学知识作出证明的问题。

一百五十多年来，研究四色猜想命题的数学家们，没能破解四色猜想命题，不是他们不具备破解四色猜想命题的数学理论知识，而是他们忽略甚至忽视了对“地图着色现象”所反映出来的本质问题进行更深层次的研究，不知道此命题这把“锁”里面结构的奥秘，只是仿照前人的开“锁”方法来开“锁”。

前人对葛斯里发现的地图着色现象的最大误读，就是把“四色”理解为该现象的最核心的关键词，将这一现象定之为“四色定理（四色猜想）”。倘若当年的数学家们能够从这一现象中，由发现平（球）体表面的图仅需四色区分，进而发现环体表面的图仅需五色区分，继而发现丁环体表面的图仅需六色区分、8 字连环体表面的图仅需七色区分，直至发现复杂、更为复杂的多环体表面的图仅需八色、九色……n 色区分，那么，他们就会从这一系列的仅需色数现象中，发现“仅需”两字才真正是地图着色现象的最核心的关键词，就会明白平（球）体表面的图仅需四色区分只不过是 n 种仅需色数现象中的一个实例而已，就会将这一系列现象定之为“仅需色数定理”。然而，令人遗憾的是，由于当时的条件所限（尤其是对地图着色现象的认识所限），前人未

能做到这一点；更令人遗憾的是，后人至今还未能纠正这一误读。

要想正确破解四色猜想命题，必须读懂并能正确回答这四个问题：问题1. 四色猜想命题要人们破解的是什么？问题2. 破解四色猜想命题的切入点在哪里？问题3. 决定和制约图的仅需色数的因素是什么？问题4. 图的面与面之间的相邻关系和非相邻关系，用数学来表达时是什么关系（即是排列关系还是组合关系），图的结构模式是什么模式（即是排列模式还是组合模式）？

实践证明，不懂得某项技术原理，就谈不上懂得对该项技术的操作。同理，不弄清楚图的形成原理，不弄清楚图的“组装原件”——面在组成图这个整体时，它们之间的关系是一种什么关系，当然也就谈不上找到破解四色猜想命题的正确答案。

四色猜想命题的破解，实际上是对“四色”这个“仅需色数”作出证明，并非是对在“四色”的前提下图的各面如何着色使之成立的证明。而笔者看到的有关四色猜想命题的证明，都属于后者的证明。就研究四色猜想命题而言，人们不仅未能走出“面的数量”这个“怪圈”，而且也未能跳出“如何着色”这个“误区”。

本人知道，k 是色数的规范符号。本人之所以以 S 而不以 k 来表示色数，是因为 S 不仅仅是表示色数，而更重要的是表示“仅需色数”。本人也知道，就证明四色猜想命题而言，“两点连线”的证明方法，是数学界公认的规范的证明方法。本人在发表的有关四色猜想命题的文章中，之所以不应用“两点连线的证明方法”，而应用自创的“边界线添画相邻点的证明方法”，其因由在于，“两点连线的证明方法”存在最大的缺陷是，当图的面数为几十个以上时，人们已很难从蜘蛛网般的图中辨认图的面与面之间的连接关系（即顶与顶之间的连接关系），而“边界线添画相邻点的证明方法”不仅克服了这个缺陷，而且比“两点连线的证明方法”具有更多的优点。首先，“边界线添画相邻点的证明方法”与图的形成原理更为相通；其次，相邻点和非相邻点更为准确、科学表达面与面之间的相邻关系和非相邻关系，在图的组合模式中容易区分；第三，由相邻点和非相邻点组成的组合模式，准确表达了图的结构模式，与数学的组合原理相吻合。这一证明方法尽管是另辟蹊径，与当今图论的证明方法不那么相容，但我坚信，总有一天是会被人们接受和认可的。

我自知本人的论证不那么规范。但正确比规范更为重要。这也就是说，在阅读本书时，请各位老师不要“先入为主”，不要以“图论”的证明方法来衡量本人的证明方法（含拙作）规范不规范，而是要以平等的眼光作比较，是谁的证明方法才是正确的证明方法。本人的证明方法及证明结果与“图论”

的证明方法及证明结果完全不同。这当中，是本人的证明方法有错，还是“两点连线”证明方法有错，抑或是“图论”应用“两点连线”证明方法时有错？对此，我认为国家数学研究机构应当予以鉴别。而笔者的答案是：本人的证明结果与正确应用“两点连线”证明方法的证明结果一致，错是错在“图论”在应用“两点连线”证明方法时存在三大缺陷。

我坚信，我的发现是正确的，我的研究成果是可靠的，总有一天是会被人们接受和认可的。因为它是来自于上千个实图的证明，来自于两种证明方法的证明，来自于多个不同物体表面的图的证明。

温家宝总理在今年召开的中国科学技术协会第八次全国代表大会上强调：“在科技领域，大力营造敢为人先、敢于创造、敢冒风险、敢于怀疑批判和宽容失败的环境，鼓励自由探索，发扬学术民主，提倡学术争鸣”。本人认为，在四色猜想命题的研究上，数学家缺少的不是钻研精神，而是“敢于怀疑”的科学态度。

科学发展史告诉我们：只有后人发现并纠正前人的错误理论，不可能前人发现并纠正后人的错误理论。但是，前人的错误理论尤其是被公认为正确的错误理论，更容易引领后人往错误的方向走下去。在四色猜想命题的研究上，是不是被一种被公认为正确的前人的错误理论引领着？——这正是我怀疑的，也是值得数学家们思考的。

作者：张尔光

2011年6月18日

目　录

CONTENTS

我对四色猜想命题的解读及证明方法的比较

摘　要　本文透过事物现象，以独有的视角，对四色猜想命题的实质性问题，包括要解答的问题是什么、地图不等于平面图、“两个数字密码”、四色区分与分为四色的异同等问题进行了解读，同时，运用实例将本人的“组合说”证明方法与其他证明方法作比较，让人们在比较中作出鉴别。

关键词　四色猜想　解读　地图　证明方法　比较

自2009年10月以来，我在《科技资讯》和《科技创新导报》先后发表了6篇有关研究四色猜想命题（简称为“四色命题”）方面的文章。为使人们能真正读懂和正确理解四色命题，认可“张尔光的‘组合说’”，本文想谈谈我对四色命题的解读，并将本人的证明方法与其他证明方法作个比较。

1. 我对四色猜想命题的解读

要破解一个数学命题，首先要读懂命题，正确解读命题，才能谈得上正确破解命题。要破解四色命题，其道理亦然。

解读一　四色命题是一个“有设定条件、已知结果、但不知因由”的命题，它要人们作出解答的是“为什么能够做到”的问题，并非是“能否做到”的问题。事实告诉我们，于1852年弗南西斯·葛斯里提出的四色命题，来自于“无论多么复杂的地图，只消用四种色调就足以将相邻区域区分开”（引自《古今数学趣话》第9页）现象。葛斯里对这个现象（即着色结果）感到不解，并认为这是个数学问题，于是便写信给他哥哥（数学家），以求得到数学解答。然而他哥哥也解答不了，他哥哥又写信给自己的老师德·摩根（大数学家），请求作出解答。老师同样解答不了……由此看

出，葛斯里完全知道四色区分这一着色结果，他提出的命题包含着“相邻区域不能同着一色”这个前提条件及“完全能够做到”和“为什么能够做到”两层含义，要人们解答的不是“能否做到”的问题，而是“为什么能够做到”的问题。

解读二　地图是四色命题中的一个关键词，地图与平面图是两个截然不同的概念。要破解四色命题，必须读懂“地图”这个词。这里说的“读懂”，是指要弄清楚地图的载体是什么、地图的形成原理、地图的结构模式以及其区域与区域之间的关系是什么。我对“地图”是这样解读的：所谓“地图”，是展现在球体表面、被划分为若干区域（国家）的组合整体。这个解读表达了三个意思：(1) 球体表面是地图的载体，研究四色命题时不应漏缺“物体表面”这个要素；(2) 地图是组合的整体，并非是排列的整体；(3) 如把“地图”解读为“平面图”（或混为一谈），那肯定是一种误读。这有事实为证。事实1，地图原本是展现在球体表面的图，平纸上的地图，只不过是将球体表面的图“移”到平体表面来展现而已。因此，地球仪上的地图与平纸上的地图是有区别的，前者的经纬线是直线，后者的经纬线是弧线。这个“弧线”，既是球体与平体的区别标志，也是地图与平面图的区别标志。事实2，同胚体不等于同一体。我们知道，圆形、方形、五角星形都是由一条 AB 线集合而成的区域，它们之间可拓扑置换，但不是同一体，当它们以“面”出现时，圆形面不等于是方形面、五角星形面。同样的道理，平体、球体、钻石体、方体、圆锥体等，其物体表面的全相邻力均为“$L=4$”（即只能做到使“4个面”全相邻），它们是同胚体，可拓扑置换。这仅是从拓扑学角度来说的。但当它们成为图的载体时，就有了本质的区别，比如球体与平体，地图上的经纬线的不同，就是最好的例证；又比如圆锥体与钻石体，如要将钻石体表面的图“移”到圆锥体表面来展现，同时又要将钻石体12个“棱面”之间的区域与区域之间的关系表达清楚，恐怕不容易做到。可见，当成为图的载体时，此同胚体不等于彼同胚体，它们之间是有本质区别的。

解读三　四色命题不是一个仅局限于对“平（球）体表面的图（即地图，下同）的仅需着色种数”研究的命题。由于球体表面的图和平体表面的图均仅需4色区分，致使人们把球体与平体误读为同一体，把两种物体表面的图归之为平面图，其研究也仅局限于对“平面图（即平、球体表面的图）的仅需着色种数”的研究。其实，假如将球体与平体解读为属于同胚体的两个物体，又将环体表面的图仅需着色种数大于4这个事实联系起来，那么，四色命题的研究应当包含“为什么同胚体表面的图其仅需着色种数相同”“为什么非同胚

体表面的图其仅需着色种数不相同”这两个子命题的研究。因为，弄清楚了这两个子命题的同异之“因”，也就找到了“为什么平、球体表面的图同为仅需4色区分”之因。所以，四色命题不是一个仅局限于对“平（球）体表面的图的仅需着色种数”研究的命题，其研究的外延应扩伸到对“其他物体表面的图的仅需着色种数”的研究（这就好比研究地球的生命起源要把研究的外延扩伸到对其他星球的生命研究一样）。

解读四　“地图的区域与区域之间（即图的面与面之间，下同）的关系是什么关系”，这是四色命题的一个重要“数字密码”。地图的区域与区域之间的关系是相邻关系和非相邻关系，这是常识问题。但当将这种“相邻关系和非相邻关系”用数学数字表达出来时，它是一种什么关系呢。这乃是破解四色命题的一个重要“数字密码”。因为，事实证明，图的需用色数的决定因素不是面的数量，而是图的面与面之间关系。因此，要破解四色命题，就得先将“地图的区域与区域之间的关系”用数学数字表达出来，方可弄清楚这个数学数字与色数数字之间的内在联系。这就是“数字密码”的原因所在。

解读五　“四色区分”与“分为四色”，两者“‘分’的等式”相同，只是“‘分’的条件”不同，“地图为什么仅需四色区分”的依据是四色命题的另一个重要“数字密码”。为说清楚这个问题，试举“人”这个例子。我们把“人（N个人）”分为若干群，在没设定条件下，随意分为2群、3群、4群……n群人，均为成立。那么，设定以“年龄段”为条件，把“人（N个人）”分为若干群，如设2个年龄段，则可分2群人；如设3个年龄段，则可分3群人；如设4个年龄段，则可分4群人……如设n（$n<N$）个年龄段，则可分n群人，均可成立。显然，两者“‘分’的等式”相同，均可表示为“n群（人）$=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+\cdots\cdots$”，但两者“‘分’的条件”不同，前者是随意分的，后者是以“年龄段”段数为依据的。同样的道理，在对“四色区分”的理解上，“四色区分”与“分为四色”，两者“‘分’的等式”相同均为“S（色数）$=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+\cdots\cdots$”，所不同的是“‘分’的条件”，“分为四色”是随意分法，不受面与面之间关系的条件限制，而“四色区分”是在“相邻区域不能同着一种颜色”的条件下进行的，是有条件分法。在这里，要指出的，“相邻区域不能同着一种颜色”是“地图仅需四色区分”的条件，并不是依据。可知，不论地图以多少种颜色区分和分为多少种颜色，其区分等式都是成立的，而“地图仅需四色区分”的依据是一个什么数字，这才是四色命题中真正要破解的“密码”。又事实告诉我们，2个面相邻需2

色区分，3 个面全相邻需 3 色区分，4 个面全相邻需 4 色区分……据此推断，平、球体表面的全相邻力能做到使“几个面”全相邻，便是“地图仅需四色区分”的依据，而“物体表面的全相邻力”是“物体表面的图仅需着色种数”的依据。本人的研究结果与此推断完全吻合。

2. 本人的证明方法与其他证明方法的比较

就四色命题来说，不同的解读，其破解的思路和证明方法也不同。有比较才有鉴别。本人的证明方法与其他证明方法，究竟哪一种证明方法才是破解四色命题的正确方法呢？不妨通过比较来鉴别。

2.1 本人的比较法与穷举法的比较

本人遵循“为什么能够做到”的思路，应用“同中求同，同中求异，异中求异，异中求同”的证明方法求得：一字状结构的图，不论其图的面的数量是多少，仅需 2 色区分，是在于其图的相邻面的组合力为 C_2^2；梳子状结构的图，不论其图的面的数量是多少，仅需 3 色区分，是在于其图的相邻面的组合力为 C_3^2；梯子状结构的图，不论其图的面的数量是多少，仅需 4 色区分，是在于其图的相邻面的组合力为 C_4^2，并进而求得“图的相邻面的组合力 C_n^2 的 n”与“图的着色种数 S”具有等于关系。那么，依照“能否做到”论者的穷举法求证，则是，一字状结构的图，当其图的面的数量为 3、4、5……n 个时，能否做到 2 色区分；梳子状结构的图，当其图的面的数量为 4、5、6……n 个时，能否做到 3 色区分；梯子状结构的图，当其图的面的数量为 5、6、7……n 个时，能否做到 4 色区分。无疑，其证明结果只能是对“能否做到”的回答，但对于“为什么能够做到”永远不会有正确答案，也不可能求得“C_n^2 的 $n=S$”这种关系等式。

同样，本人应用比较法和归纳法求得，平、球体表面的图不论其图的面的数量是多少，仅需 4 色区分，是在于其物体表面的全相邻力 $L=4$，其图的相邻面的组合力为 C_4^2；环体表面的图不论其图的面的数量是多少，仅需 5 色区分，是在于其物体表面的全相邻力 $L=5$，其图的相邻面的组合力为 C_5^2；丁环体表面的图不论其图的面的数量是多少，仅需 6 色区分，是在于其物体表面的全相邻力 $L=6$，其图的相邻面的组合力为 C_6^2，并进而求得“物体表面的全相

邻力”(L)、“物体表面的图的最高相邻面的组合力”(C_n^2)、“物体表面的图仅需着色种数”(S)三者关系的定理为：$L=C_n^2$ 的 $n=S$。那么，依照“能否做到”论者的穷举法求证，则是，平、球体表面的图，当其图的面的数量为5、6、7……n 个，又图的面与面之间关系发生变化时，能否做到4色区分；环体表面的图，当其图的面的数量为6、7、8……n 个，又图的面与面之间关系发生变化时，能否做到5色区分；丁环体表面的图，当其图的面的数量为7、8、9……n 个，又图的面与面之间关系发生变化时，能否做到6色区分。无疑，这得借用机器来证明，其证明结果只能是对“能否做到”的回答，但对于“为什么能够做到”永远不会有正确答案，更不可能通过对各物体表面的图仅需着色种数的同异原因而求得“$L=C_n^2$ 的 $n=S$”的定理。

2.2 本人“组合说”证明方法与“两顶（即两点）连线”的证明方法的比较

本人以图的形成原理为切入点，求证到图的面与面之间的相邻关系和非相邻关系均为 C_2^2 组合关系，图的结构模式是 C_N^2 组合模式。“两顶连线”的证明方法是数学界认可的证明方法。那么，这两种证明方法哪一种才是四色命题的可靠的证明方法呢？试举例作证明比较。

如图1、图2，是我国高等院校“图论”教材中有关“着色理论”的两个例图。图1是图2“加上新边 v_4v_6，v_3v_5，v_5v_7 得到的图”，该书以此证明并得出结论：“添加上新边只能色数不减，甚至变大。”

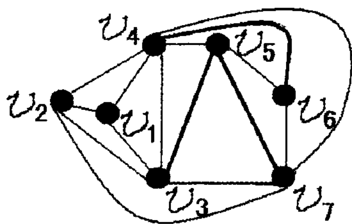


图1

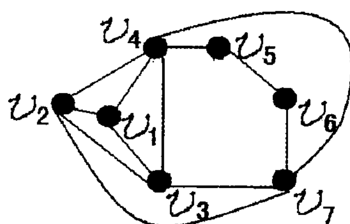


图2

图3是应用“组合说”证明方法将图1、图2完整表达后的图表。

从图1、图2与图3的比较中可知，“两顶连线”的证明方法对“添加上新边只能色数不减，甚至变大”的结果未能说出其“所以然”，而“组合说”证明方法对此结果能说出其“所以然”：图1“添加上新边”后，虽是相邻点（即边）增加了，但其图的相邻面的组合力并没有升降，仍为 C_4^2，故色数仍

为4。

图例	图2	图1
将原图的顶置换为有编号的点，将非连接的两点之间添加上虚线		
由连接点和非连接点组成的图的组合模式	(12) (13) (23) (14) (24) (34) 1‖5 2‖5 3‖5 (45) 1‖6 2‖6 3‖6 4‖6 (56) 1‖7 (27) (37) (47) 5‖7 (67)	(12) (13) (23) (14) (24) (34) 1‖5 2‖5 (35) (45) 1‖6 2‖6 3‖6 (46) (56) 1‖7 (27) (37) (47) (57) (67)
图的相邻面的组合力	C_4^2	C_4^2
需用色数	4	4

图3　图1、图2完整表达证明图

坦诚地说，这不能说"两顶连线"的证明方法是错误的证明方法，而问题是在于人们应用此证明方法时存在欠缺的地方：其一，图中表达的内容欠完整，只表达"两两相邻"关系，不表达"两两非相邻"关系。这只能说是"半个图"；其二，证明的程序欠完整，将面置换为顶（或点）、添加上连接线后，就直接进入证明程序，漏缺了将"两两相邻"关系和"两两非相邻"关系以组合数字完整记录下来，并循序对号入座到组合模式中去这个程序。正因为如此，不可能证明到图的结构模式是 C_N^2 组合模式，更谈不上从图的 C_N^2 组合模式中发现更多的东西。诚然，在应用"两顶连线"的证明方法时，假如表达的内容和证明的程序都是完整的（见图3），那么，其证明结果与本人证明方法的证明结果则必是殊途同归。正因为表达内容欠完整和漏缺了必要的程序，致使应用"两顶连线"的证明方法对地图着色区分（即四色猜想）的证明，乃是应用拓扑原理创造出新的假象（即平面图着色区分）来证明原来的假象（即地图着色区分）的证明而已。

2.3 本人的五点连接证明图与 K_5 图的比较

图4是 K_5 图，即是五色区分图。无疑，如按图4所表达的那样，图中的10条线均为连接线，表明5个点全连接，需5色区分。但如将它展现在平体表面，是不可能实现的图（地图）。因为，事实证明，平体表面不能做到五个点（面）全连接。

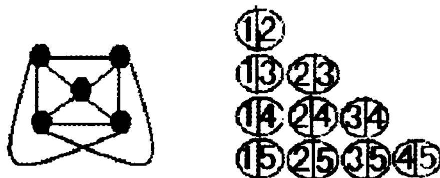


图4及其组合模式

图5是本人对平体表面不能做到五个点全连接的证明图。图中的实线是表示连接线，虚线是表示非连接线。因①与⑤两个点的连线是非连接线，故图中五个点不能做到全连接，图的相邻面组合力为 C_4^2，需4色区分。

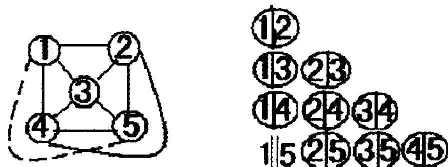


图5及其组合模式

图4、图5两个图同为由5个点10条线组成，所不同的，图4的10条线均为实线，图5的10条线为9条实线、1条虚线。这“1条虚线”之差，就是本人的“组合说”证明方法与“两顶连线”的证明方法的本质区别。那么，这两个图谁的表达是正确的呢？笔者提供两个实例作为检验的参考标准。

实例1　有5个城市彼此交通直达。现以5个点表示5个城市，以实线表示交通线（或公路），用图表达出来。可以肯定，图中10条线必有两条线交叉通过，亦即必有1条交通线被另1条交通线隔断。

实例2　将 K_5 图的5个点置换为5个面（即区域），可以肯定，不论如何变换此5个面的面与面之间的关系，必有两个面非相邻。

笔者对“两点（顶）连线”的证明方法确立了这个规则：连接线与连接线不可交叉通过；非连接线与非连接线可交叉通过；非连接线与连接线可交叉通过。当你对两个实例得出“肯定”的答案后，你认为这个规则是不是必须遵循呢？

在这里，我想说句真话：“请不要戴着‘图论’的有色眼镜、而要以平等的眼光来看本人的证明方法及学术论文，正确比规范更重要。”

科学发展史告诉我们：只有后人发现、纠正前人的错误理论，不可能前人发现、纠正后人的错误理论。但是，前人的错误理论尤其是被公认为正确的错

误理论，往往容易引领着后人往错误的方向走下去。在四色猜想命题的研究上，是不是被一种被公认为正确的前人的错误理论引领着？——这正是我怀疑的，也是值得大家思考的。

2010 年 8 月 18 日（完稿）

（本文发表于《科技创新导报》2011 年第 1 期）

物体表面的图的仅需色数的定理及其验证方法

——兼对平（球）体表面的图的仅需色数的验证

摘　要　本文以地图的形成原理为切入点，求证到地图的结构模式是 C_N^2 组合模式；应用归纳法，求得物体表面的图的仅需色数的定理，并验证这一定理的正确性提出了验证方法；本文将四色猜想命题设定为 C_N^5 组合模式并作为被验证体，以现实中地图的 C_N^2 组合模式为验证依据，证明结果，C_N^5 组合模式中每一个组合的 5 个元素（即面）至少存在 1 对不相邻的 2 个面，均仅需≤4 色区分，从而证明四色猜想成立。本文还指出，本人的证明结果与正确应用“两点连线”证明方法的证明结果相同，而错是错在“图论”应用“两点连线”证明方法时存在“三大缺陷”。

关键词　四色猜想　地图　分划法　循序逐增　组合原理　组合模式　仅需色数　证明方法

本人研究结果表明，地图的形成原理是破解四色猜想命题的切入点。它不仅可“引领”我们找到地图的面与面之间关系和地图的结构模式，而且还可“引领”我们找到破解四色猜想命题的“金钥匙”。

1.　地图的形成原理与地图的结构模式

1.1　地图的形成原理

本文论题所说的图，是指四色猜想命题中的地图。现对地图的形成原理作图证明。

图 1 是一个由 4 个面组合形成的整体。从图 2 可看出，图 1 是由 1 个面→

2 个面组合→3 个面组合→……这样一个“整体元素（即面的数量）循序逐增”的组合形成过程。

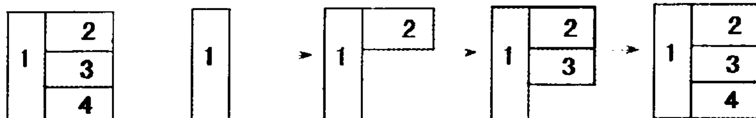
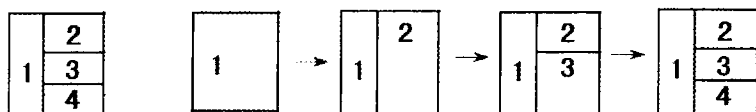


图 1　　图 2　图 1 的形成过程示意图

但用逆向思维方式去分析，图 1 它又是从一个完整的“面”→分划为 2 个面→分划为 3 个面→……这样一个“整体元素循序逐增”的分划过程（见图 3）。



（原图 1）　　图 3 图 1 的分划过程示意图

可见，地图的形成过程既是整体元素循序逐增的组合过程，又是一个整体元素循序逐增的分划过程。这就是地图的形成原理。

1.2　地图的面与面之间关系是组合关系，地图的结构模式是组合模式

定义 1　相邻面　即彼此之间有共同边界线（即相邻关系）的面。

定义 2　非相邻面　即彼此之间没有共同边界线（即非相邻关系）的面。

定义 3　全相邻面　即与地图中任何一个面均有共同边界线（即均有相邻关系）的面。

定义 4　相邻点　是用以表示两个相邻面关系的一种数学符号。就是在相邻的两个面的共同边界线上画上一个圆圈，并将这两个面的编号分别写在圆圈内组合为一组数字，这个圆圈和圆圈内的共同边界线以及组合数字就称之为相邻点（如图 4 中“⑫”就是表示“1”与“2”两个相邻面关系的相邻点）。

定义 5　非相邻点　是用以表示两个非相邻面关系的一种数学符号。就是将非相邻的两个面的编号分别写在两条竖线（这两条竖线是表示非相邻的意思）的两侧边，并组合为一组数字，这两条竖线和组合数字称之为非相邻点（如图 4 中“2 ‖ 4”就是表示“2”与“4”两个非相面的非相邻点）。

定义 6　地图的结构模式　是用以有序、准确记录地图的各面彼此之间相

邻关系和非相邻关系情况的一种数学建模。地图的结构模式由相邻点和非相邻点组成，是 C_N^2 组合模式（称为“大组合”）。它是检验此地图与彼地图的内部联系是否相同的标准。

遵循地图的“整体元素循序逐增”的基本原理，求证到地图的面与面之间关系是组合关系，地图的结构模式是 C_N^2 组合模式。现以图 1 为例进行证明。

第一步　循着图 1 的循序逐增组合过程将图的面添加上相邻点。

第二步　循着图 1 的组合过程有序列出相邻点和非相邻点，形成图的组合模式。

或是

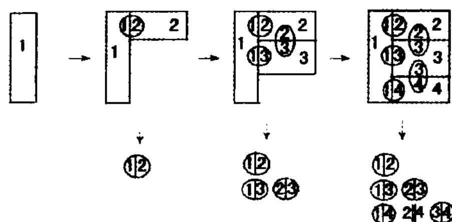


图 4　面与面之间关系的证明方法图之一

第一步　循着图 1 的循序逐增分划过程将图的面添加上相邻点。

第二步　循着图 1 的分划过程有序列出相邻点和非相邻点，形成图的组合模式。

以上求证方法，可直接将相邻点组合数字和非相邻点组合数字对号入座到图的 C_N^2 组合模式中去。

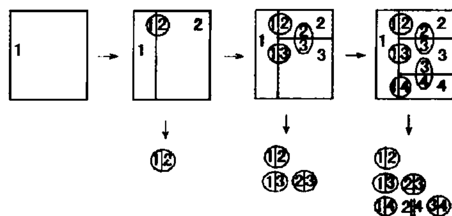


图 5　面与面之间关系的证明方法图之二

从图 4、图 5 可知：

当图的面的数量（简称为“面数”）为 1 个时，不存在相邻点，不存在组合；

当图的面数为 2 个时，图的模式仅有 1 个相邻点，相邻点的组合数字“12”正是“1”与“2”两个面的编号数字为 C_2^2 组合；

当图的面数为 3 个时，图的模式共有 3 个相邻点，相邻点的组合数字“12，13，23”，正是“1”“2”“3” 3 个面的编号数字为 C_3^2 组合；

当图的面数为 4 个时，图的模式共有 5 个相邻点和 1 个非相邻点，相邻点的组合数字和非相邻点的组合数字“12，13，23，14，24，34”，正是“1”“2”“3”“4” 4 个面的编号数字为 C_4^2 组合。

综上得出结论：地图的面与面之间关系是组合关系，不是排列关系，两个相邻面的关系是组合关系，两个非相邻面的关系也是组合关系；地图的结构模式是 C_N^2 组合模式，绝不是排列模式。因此，四色猜想命题不属于“真的机器

证明之命题"。

根据数学的组合原理，地图的组合模式的关系等式为

$C_N^2 = \frac{N*(N-1)}{2*1}$（式中的"$N$"表示图的面数）

据此，地图的组合模式与相邻点点数、非相邻点点数的关系等式为

$C_N^2 = y + z$

（式中 y 表示相邻点点数，z 表示非相邻点点数，当 $z=0$，则 $C_N^2 = y$）

2. 物体表面的图的仅需色数的定理

2.1 图的仅需色数与图的相邻面的组合力有着密切联系

定义 7　图的相邻面的组合力　是指图此整体中相邻面之间形成的组合能力，它是以有几个相邻面彼此之间均具有组合关系为衡量标准。以 C_n^2 表示（称为"小组合"）。

本人的研究结果表明，图的相邻面的组合力与图的色数（以色字汉语拼音的第一个字母"S"表示）具有等于关系。

例证 1

如图 6 所示，面数 3 个，图的相邻面的组合力为 C_2^2，图的色数为 2。现将图 3 增加 1 个面，如图 7 所示。从图 7 看出，面数 4 个，但图的相邻面的组合力没因面数增加而提升，仍为 C_2^2，图的色数仍为 2。可见，面数对图的色数不起决定性作用。

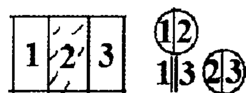


图 6 及其组合模式

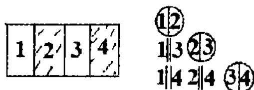


图 7 及其组合模式

例证 2

现将图 6 的 3 个面的相邻情况作改动，使原来不相邻的"1"与"3"两个面相邻，如图 8 所示。从图 8 看出，面数 3 个没变，但图的相邻面的组合力由 C_n^2 提升为 C_n^3，图的色数也随之由 2 上升为 3。可见，图的相邻面的组合力对图的色数起着决定性作用。

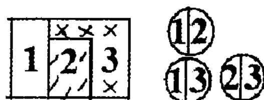


图 8 及其组合模式

例证 3

现将图 7 的 4 个面的相邻情况作改动，使其 4 个面彼此之间均相邻，如图 9 所示。从图 9 看出，面数 4 个没变，但图的相邻面的组合力由 C_2^2 提升为 C_4^2，

图的色数也随之由 2 上升为 4。可见，图的相邻面的组合力对图的色数起着决定性作用。

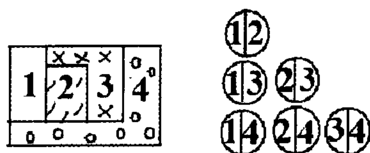


图 9 及其组合模式

综图 6 至图 9 的证明，得出结论：图的相邻面的组合力与图的色数有着密切联系，前者对后者起着决定性作用，后者的增加有赖于前者的提升。

又，已知图 6 和图 7 两个图的相邻面的组合力为 C_2^2，C_n^2 的 $n=2$，色数为 $S=2$，可见，C_n^2 的 $n=S$；

图 8 的相邻面的组合力为 C_3^2，C_n^2 的 $n=3$，色数为 $S=3$，可见，C_n^2 的 $n=S$；

图 9 的相邻面的组合力为 C_4^2，C_n^2 的 $n=4$，色数为 $S=4$，可见，C_n^2 的 $n=S$。

依照归纳法，得

图的相邻面的组合力与图的色数有着等于关系，定理为：C_n^2 的 $n=S$

2.2 物体表面的全相邻力与图的相邻面的组合力与图的仅需色数

定义 8　物体表面的全相邻力　是指物体表面最多只能做到使“几个面”彼此之间均为相邻的能力（以力字汉语拼音的第一个字母“L”来表示）。它是制约图的相邻面的组合力的因素。求得此能力的方法是分划法。

定义 9　分划法　是应用图的形成原理，将物体表面作为完整的“面”有意识地一步一步地分划为若干个面，从中求得物体表面的全相邻力的方法。所谓“有意识”，是指要遵循被新分划出来的面尽可能做到与前有的各面都具有相邻关系的原则。当出现有非相邻面时，分划即为终止。

图的需用色数受图的相邻面的组合力制约，而图的相邻面的组合力则受物体表面的全相邻力制约。

从图 10 看出，当图例 1 其 2 个面相邻，则其相邻面的组合力为 C_2^2，需 2 色区分，即全相邻面面数为 2，则 C 的 $n=2$，$S=2$。可见，三者是等于关系

当图例 2 其 3 个面全相邻，则相邻面的组合力为 C_3^2，需 3 色区分，即全

相邻面面数为 3，则 C_n^2 的 $n=3$，$S=3$。可见，三者是等于关系；

当图例 3 其 4 个面全相邻，则相邻面的组合力为 C_4^2，需 4 色区分，即全相邻面面数为 4，则 C_n^2 的 $n=4$，$S=4$。可见，三者是等于关系。

图例序号	图例	面数	图的组合模式	面与面之间相邻情况	相邻面组合力	色数
图例1	1 2	2	(12)	2个面之间相邻	C_2^2	2
图例2	1 2 3	3	(12) (13)(23)	3个面之间全相邻	C_3^2	3
图例3	1 2 4 3	4	(12) (13)(23) (14)(24)(34)	4个面之间全相邻	C_4^2	4

图 10　图的着色证明分析图表

依照归纳法，得出结论：图的全相邻面的数量与图的相邻面的组合力与图的色数三者具有等于关系。又依照逻辑推断：一个物体表面的图如需 5 色区分，其相邻面的组合力要做到 C_5^2，则物体表面的全相邻力须做到使“5 个面”全相邻。

那么，平体表面的全相邻力能做到使“几个面”全相邻呢，现应用分划法求证。

2.3　平体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

先将平体表面作为一个完整的“面”，如图 11。然后应用分划法对这个完整的“面”进行分划，见图 12。

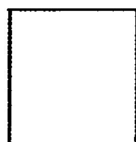


图 11

从图 12 看出，当平体表面被分划为 2 个面时，2 个面相邻，相邻面的组合力为 C；

当被分划为 3 个面时，3 个面全相邻，相邻面的组合力为 C_3^2；

当被分划为 4 个面时，4 个面全相邻，相邻面的组合力为 C_4^2；

当分划到第四步被分划为 5 个面时，不能做到 5 个面全相邻，出现了“3”与“5”两个面非相邻，相邻面的组合力仍为 C_4^2。至此，遵循分划法原则，分划求证终止。因为，不论你如何变换此 5 个面之间的相邻关系，都必有不相邻的 2 个面，无法做到使 5 个面全相邻，图的相邻面的组合力不能做到 C_5^2 组合。

分划步骤	图及面的数量	图的组合模式	面与面之间相邻情况	相邻面组合力	色数
第一步分划	1 2	(12)	2个面之间相邻	C_2^2	2
第二步分划	1 3 2	(12) (13)(23)	3个面之间全相邻	C_3^2	3
第三步分划	1 3 4 2	(12) (13)(23) (14)(24)(34)	4个面之间全相邻	C_4^2	4
第四步分划	1 3 4 5 2	(12) (13)(23) (14)(24)(34) (15)(25)35(45)	5个面之间不能做到全相邻，出现3与5非相邻	C_4^2	4

图 12　平体表面的全相邻力的分划求证图

求证结果：平体表面的全相邻力最多只能做到使“4 个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2。因此，平体表面的图，不论其面数是多少，仅需 4 色就足以将其各面区分开。所以，四色猜想命题成立。此证。

2.4 球体、正方体、圆柱体、锥体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

经应用分划法对球体、正方体、圆柱体、锥体表面进行分划（因分划过程作图繁杂，作图略），当分划到第三步、4 个面时，可做到 4 个面全相邻，相邻面的组合力为 C_4^2；当分划到第四步、5 个面时，与平体表面一样，必有不相邻的 2 个面，不能做到使 5 个面全相邻，图的相邻面的组合力不能做到 C_5^2 组合。

求证结果：球体、正方体、圆柱体、锥体表面的全相邻力最多只能做到使“4 个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2。因此，这些物体表面的图，不论其面数是多少，仅需 4 色就足以将其各面区分开。所以，就球体、正方体、圆柱体、锥体表面的图的着色区分而言，四色猜想命题成立。此证。

2.5 环体（即轮胎体）、石锁体、方框体等物体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

经应用分划法对环体（见图 13）、石锁体、方框体表面进行分划（因分划过程作图繁杂，作图略），当分划到第四步、5 个面时，可做到 5 个面全相邻，相邻面的组合力为 C_5^2；当分划到第五步、6 个面时，必有不相邻的 2 个面，不能做到使 6 个面全相邻，图的相邻面的组合力不能做到 C_6^2 组合。

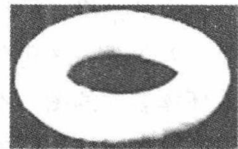


图 13

求证结果：环体、石锁体、方框体表面的全相邻力最多只能做到使“5 个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_5^2。因此，环体、石锁体、方框体表面的图，不论其面数是多少，仅需 5 色就足以将其各面区分开。所以，就环体、石锁体、方框体表面的图的着色区分而言，五色猜想命题成立。此证。

2.6 丁环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本人所说的实物丁环体如图 14 所示。经应用分划法对丁环体表面进行分

划（因分划过程难以在平体表面作图展现出来，故作图略），分划到第五步、6 个面时，可做到 6 个面全相邻，图的相邻面的组合力为 C_6^2；但当分划到第六步、7 个面时，必有不相邻的 2 个面，不能做到使 7 个面全相邻，其图的相邻面的组合力不能做到 C_7^2 组合。

求证结果：丁环体表面的全相邻力最多只能做到使“6 个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_6^2。因此，丁环体表面的图，不论其面数是多少，仅需 6 色就足以将其各面区分开。所以，就丁环体表面的图的着色区分而言，六色猜想命题成立。此证。

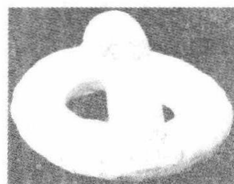


图 14

2.7 8 字连环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本人所说的实物 8 字连环体如图 15 所示。经应用分划法对 8 字连环体表面进行分划（因分划过程难以在平体表面作图展现出来，故作图略），分划到第六步、7 个面时，可做到 7 个面全相邻，图的相邻面的组合力为 C_7^2；但当分划到第七步、8 个面时，必有不相邻的 2 个面，不能做使 8 个面全相邻，图的相邻面的组合力不能做到 C_8^2 组合。

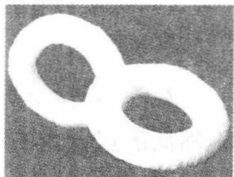


图 15

求证结果：8 字连环体表面的全相邻力最多只能做到使“7 个面”之间全相邻；其图的相邻面的组合力的极限数为 C_7^2。因此，8 字连环体表面的图，不论其面数是多少，仅需 7 色就足以将其各面区分开。所以，就 8 字连环体表面的图的着色区分而言，七色猜想命题成立。此证。

综上证明，得出结论：平体与球体、正方体、圆柱体、锥体，环体与石锁体、方框体，之所以其图的仅需色数相同，是在于其图的相邻面的组合力的极限数相同；而其图的相邻面组合力的极限数相同，又在于物体表面的全相邻力相同。平体、环体、丁环体、8 字连环体，之所以其仅需色数不同，是在于其图的相邻面的组合力的极限数不同；而其图的相邻面组合力的极限数不同，又在于物体表面的全相邻力不同。

又，已知

平体、球体、正方体、圆柱体、锥体表面的全相邻力为 $L=4$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2，C_n^2 的 $n=4$；图的仅需色数为 $S=4$。可见，$L=C_n^2$

的 $n=S$。

环体、石锁体、方框体表面的全相邻力为 $L=5$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_5^2，C_n^2 的 $n=5$；图的仅需色数为 $S=5$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

丁环体表面的全相邻力为 $L=6$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_6^2，C_n^2 的 $n=6$；图的仅需色数为 $S=6$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

8 字连环体表面的全相邻力为 $L=7$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_7^2，C_n^2 的 $n=7$；图的仅需色数为 $S=7$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

依照归纳法，得

物体表面的全相邻力、图的相邻面的组合力的极限数、图的仅需色数三者是等于关系，其定理为：$L=C_n^2$ 的 $n=S$

“$L=C_n^2$ 的 $n=S$”，这个定理就是求证“物体表面的图的仅需色数”的定理。它对于“为什么不同的物体表面的图其仅需色数有的相同，有的不相同”的着色现象作出了正确的回答，是四色猜想命题的正确答案。此证。

3. 验证物体表面的图的仅需色数定理的证明方法

前文已求得“物体表面的图的仅需色数定理：$L=C_n^2$ 的 $n=S$”。那么，以现实的图来说，该如何验证“物体表面的图的仅需色数定理”呢？下文就这一问题作出解答，并着重于对平（球）体表面的图的仅需色数（即四色猜想）进行验证证明。

3.1 验证“仅需色数定理”的原则依据

事实证明，验证“$L=C_n^2$ 的 $n=S$”这一定理，应遵循两条原则。

原则 1　遵循“何去何从”的原则。就是根据分划法求证结果和数学的组合原理，以该物体表面分划到第几步第几个面求证到全相邻力时（即出现“不相邻的两个面”时）的第几步的“几”为仅需色数，并设定为“仅需色数命题”，以第几个面的“几”为 m，将“仅需色数命题”设定为从 N 个元素中任意取出 m 个元素为一个组合的整体（即 C_N^m 组合模式），并作为被验证体。无疑，在 C_N^m 组合模式中，相对于由 N 个元素（即面）组成的图来说，不论其面与面之间的关系如何，其任意取出 m 个元素的组合则是穷举的。

原则2　以事实为依据的原则。即以现实中的图的 C_N^2 组合模式不相邻的2个元素（即面）为验证依据，对命题的 C_N^m 组合模式中每一个组合进行验证。无疑，在图的 C_N^2 组合模式中，不论是表达面与面之间的“两两相邻关系”，还是表达面与面之间的“两两非相邻关系”，都是可穷举的。

3.2　验证“仅需色数定理”的方法

以现实中的图的 C_N^2 组合模式不相邻的2个元素（即面）为验证依据，对命题的 C_N^m 组合模式中每一个组合进行验证。显然，以仅需色数命题设定的 C_N^m 组合模式中每一个组合均为一个 C_m^m 组合，m 个元素则需 m 种色区分，如 C_N^m 组合模式中每一个组合的 m 个元素（即面）都存在不相邻的2个（或2个以上）元素，则表明每一个组合的 m 个元素均有2个（或2个以上）元素可着同1色，那么“$m - C_2^2 \leqslant n$（色）”，每一个组合的 m 个元素均仅需 $\leqslant n$ 色区分，从而证明 n 色区分成立；如 C_N^m 组合模式中有一个（或多个）组合不存在不相邻的面，那么表明此个组合需 m 色区分，因 $m > n$（色），从而证明 n 色区分不成立。

现对平（球）体表面的图的仅需色数（即四色猜想）进行验证证明。

3.3　验证平（球）体表面的图的仅需色数

第一步　将四色猜想命题设定为 C_N^5 组合模式并作为被验证体

前文应用分划法求证结果告诉我们，平（球）体表面是在被分划到第四步5个面时，求证到该物体表面的全相邻力的。这个证明结果表明，展现在平（球）体表面的图中的任何“5个面”必定存在不相邻的2个面。据此，将平（球）体表面的图的仅需色数设定为四色猜想命题，并将这个命题设定为一个从 N 个元素中任意取出5个元素为一个组合的整体，即 C_N^5 组合模式（见图16）。

N	C_N^5 组合模式中的各组组合	C_N^5
5	12345	$C_5^5=1$
6	12346　12356　12456　13456　23456	$C_6^5=6$
7	12347　12357　12457　13457　23457 12367　12467　13467　23467 12567　13567　23567 14567　24567 34567	$C_7^5=21$
8	12348（余略）	$C_8^5=56$
9	12349（余略）	$C_9^5=126$
…	……	……

图16

无疑，在 C_5^2 组合模式中，相对于由 N 个元素（即面）组成的图来说，不

论其面与面之间的关系如何，其任意取出 5 个元素的组合则是穷举的。如由 5 个面组成的图，仅有“12345”一个组合；由 6 个面组成的图，共有“12345，12346，12356，12456，13456，23456”6 个组合；由 7 个面组成的图共有 21 个组合（详见图 16）。

第二步　以现实中的图的 C_N^2 组合模式为验证依据

例证 1

图 17 是由 5 个面组成的图。从图 16 的 C_N^5 组合模式中知道，由 5 个面组成的图仅有“12345”一个组合。从图 17 的 C_N^2 组合模式中看出，图 17 的 5 个面中只存在 3 与 5 两个面不相邻。由此可见，图 17 的 5 个面中 3 与 5 两个面不相邻，可着同 1 色。验证结果，图 17 的“12345”5 个元素（即 5 个面）仅需 4 色区分，其四色区分成立。

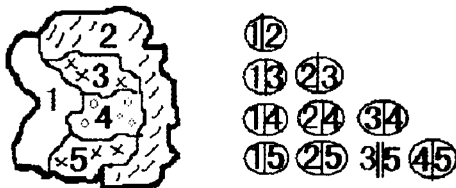


图 17 及其组合模式

例证 2

图 18 是由 6 个面组成的图。从图 16 的 C_N^5 组合模式中知道，由 6 个面组成的图共有 6 个组合（略）。从图 18 的 C_N^2 组合模式中看出，图 18 的 6 个面中存在 3 对不相邻的两个面：2 与 4，2 与 5，3 与 5。

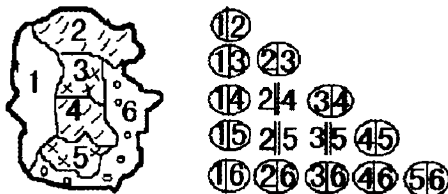


图 18 及其组合模式

现对图 18 的 6 个组合的 5 个元素予以验证：

“12345”“23456”2 组 5 个元素均存在“2 与 4、2 与 5、3 与 5”3 对不相邻的两个面，均仅需 3 色区分；

“12346”5 个元素只存在“2 与 4”1 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12356”5 个元素存在“2 与 5、3 与 5”2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12456”5 个元素存在“2 与 4、2 与 5”2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“13456”5 个元素只存在“3 与 5”1 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分。

验证结果，图 18 的 C_N^5 组合模式中共有 6 个组合，其每个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，图 18 的 6 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立。

例证 3

图 19 是由 7 个面组成的图。从图 16 的 C_N^5 组合模式中知道，由 7 个面组成的图共有 21 个组合（略）。从图 19 的 C_N^2 组合模式中看出，图 19 的 7 个面中存在 6 对不相邻的两个面：1 与 5，2 与 6，3 与 5，3 与 6，3 与 7，4 与 7。

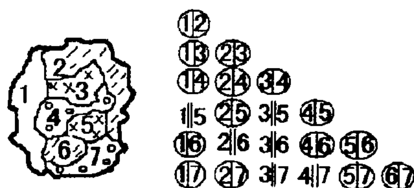


图 19 及其组合模式

现对图 19 的 21 个组合的 5 个元素进行验证：

“12345” 5 个元素存在 “1 与 5、3 与 5” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12346” 5 个元素存在 “2 与 6、3 与 6” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12347” 5 个元素存在 “3 与 7、4 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12356” 5 个元素存在 “1 与 5、3 与 5、3 与 6” 3 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“12357” 5 个元素存在 “1 与 5、3 与 5、3 与 7” 3 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“12367” 5 个元素存在 “2 与 6、3 与 6、3 与 7” 3 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“12456” 5 个元素存在 “1 与 5、2 与 6” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“12457” 5 个元素存在 “1 与 5、4 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“12467” 5 个元素存在 “2 与 6、4 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“12567” 5 个元素存在 “1 与 5、2 与 6” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“13456” 5 个元素存在 “1 与 5、3 与 6” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“13457” 5 个元素存在 “1 与 5、3 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“13467” 5 个元素存在 “3 与 6、3 与 7、4 与 7” 3 对不相邻的两个面，

仅需 3 色区分；

“13567” 5 个元素存在“1 与 5、3 与 5、3 与 6、3 与 7” 4 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“14567” 5 个元素存在“1 与 5、4 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“23456” 5 个元素存在“2 与 6、3 与 5、3 与 6” 3 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“23457” 5 个元素存在“3 与 5、3 与 7、4 与 7” 3 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“23467” 5 个元素存在“2 与 6、3 与 6、3 与 7、4 与 7” 4 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“23567” 5 个元素存在“2 与 6、3 与 5、3 与 6、3 与 7” 4 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“24567” 5 个元素存在“2 与 6、4 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

“34567” 5 个元素存在“3 与 5、3 与 6、3 与 7、4 与 7” 4 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分。

验证结果，图 19 的 C_N^5 组合模式中共有 21 个组合，其每个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，图 4 的 7 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立。

综图 17 至图 19 的证明，由 5 个面组成的图，其 C_N^5 组合模式中仅有 1 个组合，其 1 个组合的 5 个元素存在 1 对不相邻的两个面，其 5 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立；由 6 个面组成的图，其 C_N^5 组合模式中共有 6 个组合，其每一个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，其 6 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立；由 7 个面组成的图，其 C_N^5 组合模式中共有 21 个组合，其每一个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，其 7 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立。

依照归纳法，得出结论：平（球）体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_N^5 组合模式中每一个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，其 N 个面仅需 4 色区分，因此，四色猜想成立。此证。

同样，应用分划法求证结果表明，环体表面是在被分划到第五步、6 个面时求证到该物体表面的全相邻力的，亦即展现在环体表面的图中的任何“6 个面”必定存在不相邻的 2 个面。据此，将环体表面的图的仅需色数设定为五

色猜想命题，并将此命题设定为一个从 N 个元素中任意取出 6 个元素为一个组合的整体（即 C_N^6 组合模式），然后以现实中的图的 C_N^2 组合模式中“不相邻的两个面”为依据，对命题的 C_N^6 组合模式中每一个组合的 6 个元素进行验证。验证结果：环体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_N^6 组合模式中每一个组合的 6 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤5 色区分，其 N 个面仅需 5 色区分，因此，五色猜想成立。

同样，应用分划法求证结果表明，丁环体表面是在被分划到第六步、7 个面时求证到该物体表面的全相邻力的，亦即展现在丁环体表面的图中的任何“7 个面”必定存在不相邻的 2 个面。据此，将丁环体表面的图的仅需色数设定为六色猜想命题，并将此命题设定为一个从 N 个元素中任意取出 7 个元素为一个组合的整体（即 C_N^7 组合模式），然后以现实中的图的 C_N^2 组合模式中“不相邻的两个面”为依据，对命题的 C_N^7 组合模式中每一个组合的 7 个元素进行验证。验证结果：丁环体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_7^2 组合模式中每一个组合的 7 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤6 色区分，其 N 个面仅需 6 色区分，因此，六色猜想成立。

同样，应用分划法求证结果表明，8 字连环体表面是在被分划到第七步、8 个面时求证到该物体表面的全相邻力的，亦即展现在 8 字连环体表面的图中的任何“8 个面”必定存在不相邻的 2 个面。据此，将 8 字连环体表面的图的仅需色数设定为七色猜想命题，并将此命题设定为一个从 N 个元素中任意取出 8 个元素为一个组合的整体（即 C_N^8 组合模式），然后以现实中的图的 C_N^2 组合模式中“不相邻的两个面”为依据，对命题的 C_N^8 组合模式中每一个组合的 8 个元素进行验证。验证结果：8 字连环体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_N^8 组合模式中每一个组合的 8 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤7 色区分，其 N 个面仅需 7 色区分，因此，七色猜想成立。

3.3 需说清楚的几个问题

其一、关于 C_n^2 组合与 C_n^n 组合相通关系的问题

图 20 是表达 C_n^2 组合与 C_n^n 组合相通关系的图表。此图表表达了 4 个意思，（1）C_n^2 组合与 C_n^n 组合，两者组合数虽不等同，但两者作为组合的整体，两者的组合元素、区分元素均是等同的。从该图表看出，C_3^2 组合的整体，其组合元素、区分元素是 3，同样，C_3^3 组合的整体，其组合元素、区分元素也是 3；

C_4^2 组合的整体，其组合元素、区分元素是4，同样，C_4^4 组合的整体，其组合元素、区分元素也是4；C_5^2 组合的整体，其组合元素、区分元素是5，同样，由 C_5^5 组合的整体，其组合元素、区分元素也是5，其余依此类推。(2) 正因为 C_n^2 组合与 C_n^n 组合两者关系相通，所以，就表达整体的组合元素、区分元素而言，C_n^n 组合可转换为 C_n^2 组合。(3) 在以 n 色猜想命题设定的 C_N^m 组合模式中，C_m^m 组合与 C_n^2 组合也是相通的。C_N^m 组合模式中的每一个 C_m^m 组合均是一个由若干 C_n^2 组合的“小整体”。(4) 在 C_n^2 组合的“小整体”中，C_n^2 组合表达的不论是 m 个元素彼此之间的相邻关系还是非相邻关系都是可穷举的。

	C_n^2 组合	n	C_n^n 组合	
C_2^2	12	2	1 2	C_2^2
C_3^2	13 23	3	1 2 3	C_3^3
C_4^2	14 24 34	4	1 2 3 4	C_4^4
C_5^2	15 26 35 45	5	1 2 3 4 5	C_5^5
C_6^2	16 26 36 46 56	6	1 2 3 4 5 6	C_6^6
	……	……	……	

图20　C_n^2 组合与 C_n^n 组合相通关系图

其三，四色猜想命题的破解，实际上是对“四色”这个“仅需色数”作出证明，并非是对在“四色”的前提下图的各面如何着色使之成立的证明。而笔者看到的有关四色猜想命题的证明，都属于后者此类的证明。在研究四色猜想命题上，人们不仅未能走出“面的数量”这个“怪圈”，而且也未能跳出“如何着色”这个“误区”。

4.　“图论”应用“两点连线”证明方法时存在三大缺陷

定义10　“两点连线”证明方法是指数学家赫伍德创建的、当今数学界认可和“图论”教科书通用的证明方法。即应用拓扑原理，将连接体（面）置换为“点”（也称为顶点），并在两“点”之间添画上一条连线（也称为边），以此证明着色区分的方法。

就证明四色猜想命题而言，本人的证明方法及证明结果与“图论”的证明方法及证明结果完全不同。这当中，是本人的证明方法有错，还是“两点连线”证明方法有错，抑或是“图论”应用“两点连线”证明方法时有错？对此，现将地图的“整体元素循序逐增”的基本原理与“两点连线”证明方法进行对接，答案自有分晓。

“图论”缺陷1　漏缺了将“连线两端数字以组合数字记录下来”这道程序

图21是“图论”教科书中的一个例图。现将该图的点转换为有编号的点

（见图22），遵循地图的“整体元素循序逐增”的基本原理，将每条连线两端数字以组合数字记录下来，随之形成图的组合模式（见图23）。

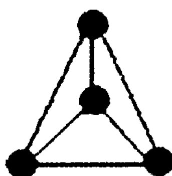


图21

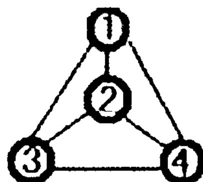


图22

从图23看出，图21的结构模式为 C_4^2 组合模式。可见，“两点连线”证明方法与本人的证明方法，两者证明结果相同：地图的结构模式是 C_N^2 组合模式。同时证明，“两点连线”证明方法本身没有错，错是错在“图论”在应用“两点连线”证明方法时，没有遵循地图的“整体元素循序逐增”的基本原理，在将地图置换为“两点连线”的图后，漏缺了将“连接线两端数字和非连接线两端数字以组合数字记录下来”这道程序，而直接进入证明色分程序，完全没有切入地图的 C_N^2 组合模式。这便是“图论”应用“两点连线”证明方法时存在的缺陷之一。

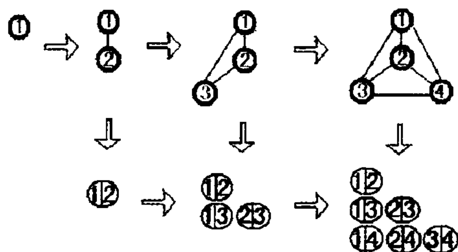


图23　图21的形成过程及图的组合模式

“图论”缺陷2　图的连线只表达“两两相邻”关系，不表达“两两非相邻”关系

图24、图25是“图论”教科书中有关“着色理论”的两个例图。图24是图25“加上新边 v_4v_6，v_3v_5，v_5v_7 得到的图”，该书以此证明并得结论：“添加上新边只能色数不减，甚至变大。”

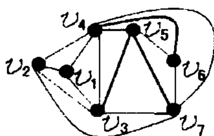


图24

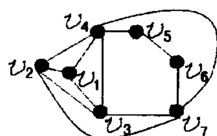


图25

图26是根据本人的“组合说”理论将图24、图25完整表达后的图表。

从图24、图25与图26的比较中可知，同样是应用“两点连线”证明方法，“图论”对“添加上新边只能色数不减，甚至变大”的结果未能说出其“所以然”，而本人的“组合说”理论对此结果能说出其“所以然”：图24“添加上新边”后，虽是相邻点（即边）增加了，但其图的相邻面的组合力并没有升降，仍为 C_4^2，故色数仍为4。显然，“图论”未能说出其“所以然”，是错在“图论”将地图用“两点连线”方法表达时，只表达“两两相邻”关系，不表达“两两非相邻”关系，其表达的地图，乃是漏缺了“两两非相邻”这一半的“半个地图”。因此，“图论”不可能发现地图的整体结构是 C_N^2 组合

模式，更不可能从图的组合模式中发现“图的相邻面的组合力”与“图的色数”两者的关系。此是“图论”应用“两点连线”证明方法时存在的缺陷之二。

“图论”缺陷 3　图的连线运行只讲随意性，没有遵循“连线运行规则”

图 27 是 K_5 图，即是五色区分图。无疑，如按图 27 所表达的那样，图中的 10 条连线均为连接线，表明 5 个点全连接，需 5 色区分。然而，如果 K_5 图作为平面图来表达（即是展现在平体表面的图），它是不可能实现的图（地图）。因为，本人研究结果表明：平体表面的图不能做到 5 个点（亦即 5 个面）全连接。据此，本人定了个“连线运行规则”：连接线与连接线不可交叉通过；非连接线与非连接线可交叉通过；非连接线与连接线可交叉通过。事实证明，这一规则是必须遵循的规则，只有遵循这一规则，“两点连线”证明方法的完整性和准确性才能得之于体现。

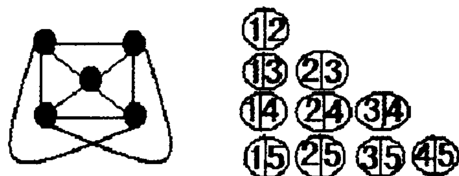


图 27 及其组合模式

图 28 是平体表面不能做到 5 个点全连接的证明图。图中的实线是表示连接线，虚线是表示非连接线。因①与⑤两个点非连接，故图中 5 个点不能做到全连接，图的相邻面的组合力为 C_4^2，仅需 4 色区分。

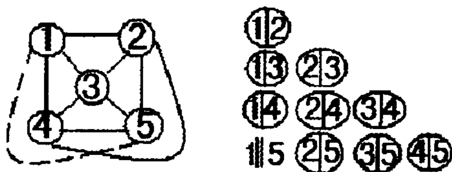


图 28 及其组合模式

图 27、图 28 两个图同为由 5 个点 10 条连线组成，所不同的，图 27 的 10 条连线均为连接线（即实线），图 28 的 10 条连线为 9 条连接线（即实线）、1 条非连接线（即虚线）。这“1 条虚线”之差，就是平体表面不能做到 5 个点全连接的标志，是本人的“组合说”证明方法与“图论”应用“两点连线”证明方法的本质区别。

图 27 与图 28 两个图的比较证明告诉我们，“图论”应用“两点连线”证明方法的缺陷之三，就在于表达地图的面与面之间的关系时，连线运行只讲随意性，没有遵循“连线运行规则”。

总之，本人“组合说”的证明方法的证明结果与正确应用“两点连线”证明方法的证明结果完全一致，而“图论”错就错在未能正确应用“两点连线”证明方法。

恕我直言：四色猜想命题，是一个典型的被事物现象遮住了事物本质的命

题。想要破解它，首先要读懂它，正确解读它。前人对葛斯里发现的地图着色现象的最大误读，就是把“四色”理解为该现象的最核心的关键词，将这一现象定之为“四色定理（四色猜想）”。倘若当年的数学家们能够从这一现象中，由发现平（球）体表面的图仅需四色区分，进而发现环体表面的图仅需五色区分，继而发现丁环体表面的图仅需六色区分、8字连环体表面的图仅需七色区分，直至发现复杂、更为复杂的多环体表面的图仅需八色、九色……n 色区分，那么，他们就会从这一系列的仅需色数现象中，发现“仅需”两字才真正是地图着色现象的最核心的关键词，就会明白平（球）体表面的图仅需四色区分只不过是 n 种仅需色数现象中的一个实例而已，就会将这一系列现象定之为“仅需色数定理”。然而，令人遗憾的是，由于当时的条件所限（尤其是对地图着色现象的认识所限），前人未能做到这一点；更令人遗憾的是，后人至今未能纠正前人这一误读。

图例	图 25	图 24
将原图的顶置换为有编号的点，将非连接的两点之间添加上虚线		
由连接点和非连接点组成的图的组合模式	(12) (13) (23) (14) (24) (34) 1‖5 2‖5 3‖5 (45) 1‖6 2‖6 3‖6 4‖6 (56) 1‖7 (27) (37) (47) 5‖7 (67)	(12) (13) (23) (14) (24) (34) 1‖5 2‖5 (35) (45) 1‖6 2‖6 3‖6 (46) (56) 1‖7 (27) (37) (47) (57) (67)
图的相邻面的组合力	C_4^2	C_4^2
需用色数	4	4

图 26　图 24、图 25 完整表达证明图

2011 年 2 月 18 日（完稿）

（注：本文是发表于《科协论坛》2011 年 8 期下半月刊《物体表面的图的仅需色数的定理及其验证方法》一文原发稿，发表时因文字字数限制的要求，作了较大的删减）

四色猜想研究应走出“面的数量”怪圈

摘　要：本文明确指出面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性作用，物体表面是研究四色猜想不可漏缺的要素，要找到四色猜想的正确答案，应把研究的触角延伸到其他物体表面的图的着色区分，从中发现物体表面、图、面、色四者关系的内在规律，进而找到科学的证明定理。

关键词：四色猜想　面的数量　怪圈　物体表面　内在规律

本人对四色猜想研究的结果表明：面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性作用，面的数量不是四色猜想命题中的决定因素。据此，人们研究四色猜想应当走出“面的数量”这个怪圈，另辟蹊径，从物体表面、图、面、色四者关系的内在规律去寻求正确的证明答案。

1.　事实证明：面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性作用

1.1　A 组图的比较证明

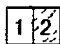


图 A.1

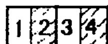


图 A.2



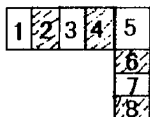
图 A.3

从 A 组三个图看出，三个图面的数量各不相同，图 A.1 是 2 个面，图 A.2 是 4 个面，比图 A.1 多了 1 倍；图 A.3 是 8 个面，分别比图 A.1、图 A.2 多了 3 倍和 1 倍。然而，图 A.1、图 A.2、图 A.3 此三个图需用颜色区分的种数同为 2 种颜色。A 组图的比较结果是：尽管图 A.2 比图 A.1、图 A.3 比图 A.2 面的数量在成倍地增加，而需用颜色区分的种数并没增加，可见，面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性

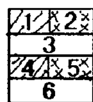
作用。

1.2 *B* 组图的比较证明

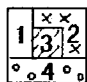
从*B*组图的三个图看出，图*B*.1为8个面，仅需2色区分；图*B*.2为6个面，仅需3色区分；图*B*.3为4个面，需4色区分。在*B*组图的三个图中，图*B*.1的面的数量为最多，而需用颜色区分的种数则最少，比图*B*.2、图*B*.3分别少1种颜色和2种颜色；反之，面的数量为最少的图*B*.3，其需用颜色区分的种数却最多，比图*B*.1、图*B*.2分别要多2种颜色和1种颜色。*B*组图的比较结果同样告诉我们：面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性作用。



图*B*.1



图*B*.2



图*B*.3

1.3 地图与铁链的比较证明

铁链是人们十分熟悉的一种物品。根据拓扑学置换原理，将铁链的铁环变换为地图上的国家，那完全可以把无数个国家连接在一条铁链上。假如用颜色将这条铁链上的相邻国家区分开，那么，无论这条铁链上的国家数是2个、10个、100个……都仅需用2种颜色就足可做到。这一铁的事实又告诉我们：面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性作用。

从上述的比较证明中得出结论：在四色猜想这个命题中，面的数量对图的需用颜色区分的种数不起决定性作用，因而，面的数量不是四色猜想命题中的决定因素。

在这里需要指出的是，地图与铁链的比较证明给我们提出了一个值得思考的问题：人们在验证四色定理时，不懈地致力于提高图中的面的数量（即国家数）的上限，这种做法没有多大的研究价值。因为，以笔者的观点看来，验证“四色定理在图的面的数量为4个、12个、39个时是可以成立，当面的数量为100个、10000个……时是否成立”的问题，犹如验证“4个铁环、12个铁环、39个铁环可连接成一条铁链，100个、10000个……铁环是否可连接成一条铁链”的问题一样。很显然，对于后一个问题，任何一个思维正常的人都不会去研究它。因为，谁都知道它是一个没有多大研究价值的问题。令笔者感到不解的是，四色猜想的研究者们为什么却热衷于研究像后一个问题一样

的问题呢？为什么进入“面的数量”这个怪圈后就难于走出来呢？

2. 事实证明：物体表面是四色猜想命题中的一个要素

中国有一句富有哲理的成语，叫做“皮之不存，毛将焉附”。在四色猜想命题中，物体表面与图的关系，就是“皮”与“毛”的关系，即物体表面是“皮”，图是“毛”。“皮之不存，毛将焉附”这句成语足以说明了物体表面在四色猜想命题的诸要素中的地位。然而，人们对四色猜想命题的理解犯的其中一个错误，恰恰就是：只看到了“毛”，而看不见“毛”遮掩之下的“皮”；只看到了图的重要，而看不见图的载体——物体表面的作用。

本人的研究结果表明：一个图的需用颜色区分的种数与图的载体——物体表面有着密不可分的联系。展现在球体（平体）表面的图，仅需用4色足以将其各个面区分开；展现在环体（即轮胎体）表面的图，仅需用5色足以将其各个面区分开；展现在丁环体（见图3）表面的图，仅需用6色足以将其各个面区分……这些物体表面的图仅需用颜色区分的种数之所以不同，其中一个重要原因就在于图的载体——物体表面之不同。说得明白一点，人们在球体（平体）表面可以轻而易举地构造出由百、万、亿个面组成整体的图，但绝不可能构造出一个需用5色区分的图来，想要构造出一个需用5色区分的图来，唯有在环体表面、丁环体表面及具备相应条件的其他物体表面才能得之以实现。同样的道理，人们绝不可能在球体（平体）表面和环体表面构造出需用6色区分的图来，唯有在丁环体表面及具备相应条件的其他物体表面才能构造出一个需用6色区分的图来。

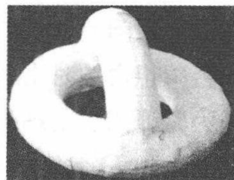


图3

可见，一个图需用多少种颜色区分，与这个图的载体——物体表面有着密切联系，物体表面是四色猜想命题中的一个不可漏缺的要素。

3. 人们走不出“面的数量”怪圈的主要原因

原因之一　对四色猜想证明的问题发生了旁移

笔者认为，人们走不出“面的数量”怪圈的主要原因之一，是对四色猜想证明的问题发生了旁移。

为了说明这个问题，笔者在这里打一个比喻（本人知道任何一个比喻都是蹩脚的道理）。这好比分散居住在各大城市的一大家族人，由这一大家族人分生出两个问题：一个是这一大家族人的探亲来往的问题（即探亲路线问题）；另一个是这一大家族人的人与人之间关系的问题（即血缘关系问题）。大家都明白，探亲路线问题与这一大家人的人数和分居点有着密切联系，而血缘关系问题与这一大家人的人数和分居点没有什么联系，却与几代亲、称谓有着密切联系，假如这一大家族人是属于“四代亲”，那么，不论这一大家族人有多少个人，仅用“四代亲”的称谓就足以将他们之间的关系表述清楚。据此，可以说，四色猜想命题中“图的面与面之间的关系”就好比这一大家族人的“人与人之间的血缘关系”，“颜色区分”就好比血缘关系的“称谓区分”。笔者打这个比喻，其意思是说，四色猜想命题的本质属性是类似于“血缘关系问题”，不是类似于“探亲路线问题”，说人们对四色猜想证明的问题发生了旁移，就是指当今人们对四色猜想证明的问题不是“这一大家族人的血缘关系问题”，却是“这一大家族人的探亲路线问题”，因而，人们在研究四色猜想命题时也就自然地把面的数量当做一个决定因素，并把提升面的数量作为验证四色定理的一个目标去追求。从弗南西斯·葛斯里的胞兄弗德雷克·葛斯里到著名数学家德·摩根、哈密尔顿爵士，直到今天的四色猜想研究者们，都是把面的数量作为四色猜想的一个决定因素。当年曾是爱因斯坦导师的闵可夫斯基教授之所以自置于“挂起黑板”的窘境，数学家斯蒂芬之所以会闹出“染色游戏，不堪一击”的笑话，20 世纪 70 年代美国数学家阿沛尔教授和哈肯教授之所以动用三台超高速电子计算机对四色定理作出验证，无一不是把面的数量作为四色猜想的一个决定因素，无一不是把“面的数量”突破作为四色猜想研究的目标去追求。这也是人们把四色猜想定之为“真的机器证明”的根本原因所在。

从以上事实看出，人们之所以走不出“面的数量”怪圈，其中一个重要原因就是对四色猜想所证明的问题发生了旁移。

原因之二　误读“地图”一词，漏缺了物体表面这个要素

四色猜想的研究者们之所以置身于“面的数量”怪圈中走不出来，另一个重要原因就在于没有真正读懂四色猜想命题中的第一个关键词——“地图”。一直以来，人们把四色猜想命题中的“地图”理解为“空中楼阁般的图”。其实，这种理解是不正确的。笔者对四色猜想命题中的“地图”一词的解读是：所谓“地图”就是展现在球体（平体）表面由若干个面组成的图。所谓“图”，就是展现在物体表面并由若干个面组成的整体。据此，在四色猜

想这一命题中，物体表面、图、面、色四者是四个要素。球体（平体）表面是物体表面的缩影，物体表面是图的载体，图是若干个面组成的整体，面是组成图的主体，色就是区分区域的“角色”。物体表面、图、面、色这四者关系反映出来的内在规律，正是四色猜想为什么能够成立的科学依据。因此，可以说，研究四色猜想，物体表面、图、面、色这四个要素都十分重要，缺一不可。如果漏缺了某个要素，那么，对四色猜想所作出的数学证明及得出的证明结果，必然经不起科学的验证，对四色猜想诚然也不可能作出科学的正确的证明。人们研究四色猜想老是游走于“面的数量”怪圈之内，其错误就在于把地图看作为空中楼阁般的图，不是把它理解为展现在一个载体上面的图。因而，在研究四色猜想时，自然也就漏缺了物体表面这个要素，忽视了图的载体——物体表面客观存在的作用。

原因之三　只局限于对地图四色区分现象的研究

这也就是说，人们在研究四色猜想时，过于专一地对地图四色区分现象的研究，没有把四色猜想研究的触角伸展到“展现在其他物体表面的图”的范围。

对于球体（平体）表面的图仅需用四种颜色区分，环体表面的图仅需用五种颜色区分，其他物体表面的图仅需用颜色区分的种数也不同的事实，我相信，四色猜想的研究者中不乏知道之人。可是，为什么没有人把这些物体表面的图与其仅需用颜色区分的种数联系起来进行逻辑分析，研究它们仅需用颜色区分的种数之不同的原因所在呢？相反地，四色猜想的研究者们却痴迷于展现在球体（平体）表面的由 5 个、12 个、39 个、100 个……n 个面组成的图能否做到四色区分的问题的研究，沿着“面的数量”怪圈转转悠悠，完全走不出“面的数量”这个怪圈，甚至得出“四色猜想为真的机器证明”的定论。这不能不说是一种遗憾。

4.　四色定理、五色定理的提法经不起逻辑推理

物体表面、图、面、色四者关系的内在规律告诉我们：就物体表面、图、面、色四者之间的关系来说，只要这个物体表面具备了相应的条件，那么，人们就可在这个物体表面构造出需用 n 种颜色区分的图来。比如，环体表面具备了构造出需用五种颜色区分的图的条件，那么，人们完全可以在环体表面构造出需用五种颜色区分的图来；又比如，丁环体表面具备了构造出需用六种颜色

区分的图的条件，那么，人们完全可以在丁环体表面构造出需用六种颜色区分的图来。依照归纳法，只要这个物体表面具备了构造出需用 n （$n \geq 4$） 种颜色区分的图的条件，那么，人们就可在这个物体表面构造出需用 n 种颜色区分的图来。据此，可作这样的定论，人们完全可以在具备相应条件的物体表面构造出需用百、万、亿乃至无数种颜色区分的图来。

依照上述定论，四色定理、五色定理的提法有悖于物体表面、图、面、色四者关系的内在规律，经不起逻辑推理。我们暂不去分辨四色定理、五色定理是命题名称还是定理名称，但有一点十分清楚，既然人们完全可以在具备相应条件的物体表面构造出需用百、万、亿乃至无数种颜色区分的图来，如将"定理"两字与色的数量组合为数学的命题名称或定理名称，那么就要相对应地有"百色定理""万色定理""亿色定理"乃至无数个"n 色定理"的命题名称或定理名称，如此没完没了的名称，岂不是荒诞可笑矣。因此，四色定理、五色定理的提法有违背数学严谨、科学的原则。

笔者认为，不论是球体（平体）表面的四色区分的图，还是环体表面的五色区分的图、丁环体表面的六色区分的图以及其它物体表面的 n 色区分的图，尽管它们仅需用颜色区分的种数不同，但它们所反映出的本质内涵应是相同的，给予证明的定理应是同一个，不应是无数个。在这里，笔者可以自豪地说：张尔光已找到了一个不仅对球体（平体）表面的四色区分的图能够作出科学证明，而且对环体表面的五色区分的图、丁环体表面的六色区分的图以及其它物体表面的 n 色区分的图都能够作出科学证明的通用定理，这个定理叫做"图的着色区分定理"。张尔光的研究结果完全否定了"四色猜想为真的机器证明"之说。同时也坦诚地说，由于本人只是一位研究四色猜想的兴趣者，并非是数学学者，数学理论知识贫乏，难以将自己的研究成果写成规范的数学论文，这就好比一名乡村土医生发现并掌握了医治某种奇难杂症的药方疗法，难以将他自己的这种药方疗法写成规范的医学论文一样。故此，本人撰写此文的目的：一是想借媒体透露本人研究成果的信息，以引起数学界的关注；二是寻求一个当今华罗庚式的数学家与本人的合作，共同为破解四色猜想命题画上圆满的句号。

完 稿 时 间：2007 年 6 月 6 日
最新修改时间：2009 年 2 月 3 日

参考文献：

（1）尹斌庸等著．古今数学趣闻．四川科学技术出版社．1985

（2）王树禾．图论．科学出版社．2004

（本文被评为2007年“第六届中国科学家论坛自主创新学术成果”优秀奖，被中国重要会议论文全文数据库全文收录）

破解四色猜想命题的切入点在哪里?

摘　要　本文运用逻辑推理和抽丝剥茧的方法，围绕“破解四色猜想命题的切入点在哪里”这个问题，循着“四色猜想命题的不可理解性的两个因素→排除图的需用颜色非决定性因素→图的面与面之间的关系及其理论依据”的思路进行层层分析证明，最后得出了“图的形成原理才是真正切入点”的答案。

关键词：四色猜想　切入点　图　面与面之间的关系　组合　原理

笔者在拙作《四色猜想研究应走出“面的数量”怪圈》中明确指出，面的数量不是图的需用颜色区分种数的决定性因素，因此，四色猜想命题的研究应当走出“面的数量”怪圈。既然如此，那么，破解四色猜想命题的切入点(下文简称为“切入点”)在哪里呢?为使四色猜想命题的研究者们能接受本人的“组合说”(本人把自己对四色猜想的研究成果称之为“组合说”)，本文想运用逻辑推理和抽丝剥茧的方法对这个议题进行论证。

1.　第一个要弄清楚的问题：切入点与四色猜想命题的不可理解性的两个因素

笔者认为，找准破解四色猜想命题的切入点，这是破解四色猜想命题的关键之关键，而要找准这个切入点，首先得要弄清楚四色猜想命题的不可理解性的两个因素。这是因为，切入点就隐藏在四色猜想命题的不可理解性的两个因素之中。那么，四色猜想命题的不可理解性的两个因素又是指什么呢?为此，让我们把镜头回到当年英国大学生弗南西斯·葛斯里的发现来吧。

我们知道，1852年，刚从大学毕业的弗南西斯·葛斯里，在对英国地图

着色的时候，发现一个很有趣的现象，对无论多么复杂的地图，只消用四种颜色就足以将相邻区域区分开。弗南西斯认定这种现象隐藏着一个深奥的数学问题，于是他便把这个发现提了出来。后来人们把弗南西斯发现的地图着色现象定之为“四色猜想”命题。

从上述的这段文字中不难看出，四色猜想命题的不可理解性，就在于地图的“无论多么复杂”。很显然，地图的“无论多么复杂”包含着两个方面：一个是指无论面（即区域，下文同）的数量是多少；另一个是指面与面之间的关系。这两个方面，其实就是四色猜想命题的不可理解性的两个因素。那么，这两个因素中，究竟哪个因素才是真正的切入点呢？

2. 第二个要弄清楚的问题：面的数量对图的需用颜色区分种数不起决定性作用，因而不是切入点

我们知道，在四色猜想命题中，面是最核心的要素，在组成图的过程中，面又表现出两个因素，一是面的数量，二是面与面之间的关系。而这两个因素，正与四色猜想命题不可理解性的两个因素相吻合。这也就是说，面在组成图的过程中所表现出来的两个因素，正是四色猜想命题不可理解性的两个因素。四色猜想命题讲的是“（展现在平体表面的图）为什么仅需用四种颜色就足以将其各面区分开”的问题，也即是着色区分的问题。据此，无疑，要找破解四色猜想命题的切入点，是对图的需用颜色种数起决定性作用的因素，而不是别的因素。那么，在“面的数量”与“面与面之间的关系”的两个因素中，哪一个才是对图的需用颜色种数起决定性作用的因素呢？这就让事实来说话吧。

事实1　本人的研究结果表明，一字状结构的图（本人把其面一字排列组成的图称之为“一字状结构的图”），不论其面的数量是多少，仅需用2色就足以将其各面区分开（见图1）。

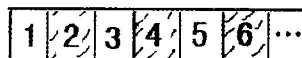


图1

事实2　本人的研究结果表明，梳子状结构的图（本人把其面排列组成如梳子状的图称之为“梳子状结构的图”），不论其面的数量是多少，仅需用3色就足以将其各面区分开（见图2）。

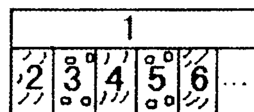


图2

事实3 本人的研究结果表明，梯子状结构的图（本人把其面排列组成如梯子状的图称之为“梯子状结构的图”），不论其面的数量是多少，仅需用4色就足以将其各面区分开（见图3）。

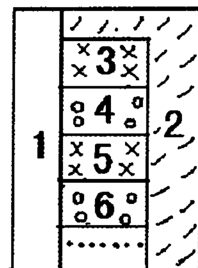


图3

上述的三个事实的相同条件是“不论其面的数量是多少”，不同的结果是“仅需用颜色区分的种数”。这三个事实有力地证明，“不论其面的数量是多少”——即“面的数量”不是图的需用颜色种数起决定性作用的因素。既然如此，那么，依照逻辑排除法，将“面的数量”这个因素排除出切入点之外，剩下“面与面之间的关系”这个因素应是破解四色猜想命题的切入点。

那么，图的面与面之间的关系究竟是一种什么样的关系呢?

3. 第三个要弄清楚的问题：图的面与面之间的关系究竟是一种什么样的关系?

定义1 相邻面 即彼此之间有共同边界线的面。

定义2 非相邻面 即彼此之间没有共同边界线的面。

定义3 全相邻面 即与图中任何一个面均有共同边界线的面。如这个图所有的各面彼此之间只存在相邻关系，不存在非相邻关系，那么其所有的面均为全相邻面，也即这个图是由全相邻面组成的图。

定义4 相邻点 就是在相邻的两个面的共同边界线上画上一个圆圈，并将这两个面的编号分别写在圆圈内组合为一组数字，这个圆圈和圆圈内的共同边界线以及组合数字就称之为相邻点（如图6中“⑫”就是“1”与“2”两个面的相邻点）。它与图论中所说的“顶”有着本质的区别。

定义5 非相邻点 就是将非相邻的两个面的编号分别写在两条竖线（这两条竖线是表示非相邻的意思）的两侧边，并组合为一组数字，这两条竖线和组合数字称之为非相邻点（如图9中“2‖4”就是“2”与“4”两个面的非相邻点）。

定义6 图的组合模式 就是各面在连接组合形成图时的一种结构形式。这种结构形式可通过将图的各个相邻点的组合数字和非相邻点的组合数字，对号入座到 C_N^2 的组合模式中反映出来。从这个意义上说，图的组合模式就是具体、准确反映图的各面彼此之间相邻关系和非相邻关系情况的记录图。

图的面与面之间的关系究竟是一种什么样的关系？事实证明，图的面与面之间的关系就是一种组合关系。且看下面作图证明。

例证 1

如图 4 所示，图中 4 个面彼此之间均相邻，不存在非相邻面，是一个由 4 个全相邻面组成的图。那么，图 4 中的面与面之间是一种什么样的关系呢，现对其作出证明：

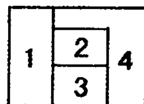


图 4

第一步　将图添画上相邻点，如图 5 所示。

第二步　有序列出图 5 的各相邻点，见图 6。

第三步　有序列出非相邻点。因图 4 的 4 个面彼此之间均相邻，不存在非相邻面，故无非相邻点。

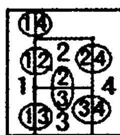


图 5

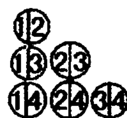


图 6

第四步　将相邻点和非相邻点对号入座到图的组合模式，见图 7。

从图 7 看出，共有 6 个相邻点，相邻点的组合数字正是“1”“2”“3”“4”4 个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合，相邻点点数为 $C_n^2=C_4^2$，其组合等式为 $C_4^2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$。可见，图 4 的面与面之间的关系是组合关系，而图的模式也是组合模式。此证。

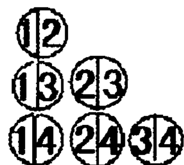


图 7

例证 2

如图 8，是一个由 5 个面组成的图。从该图看出，图中 5 个面“1”与“2”、“1”与“3”、“1”与“4”、“2”与“3”、“2”与“5”、“3”与“4”、“3”与“5”、“4”与“5”彼此之间相邻，“2”与“4”、“1”与“5”彼此之间非相邻，是一个由全相邻面和非全相邻面组成的图。那么，图 8 中的面与面之间是一种什么样的关系呢，现予以作图证明：

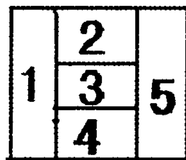


图 8

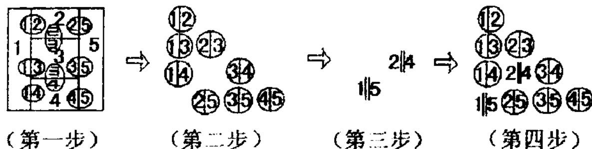


图 9　图 8 的面与面之间关系的证明步骤图

第一步　在两个相邻面的共有边界线添画上相邻点（见第一步图）；

第二步　有序列出图的各相邻点（见第二步图）；

第三步　有序列出非相邻点（见第三步图）；

第四步　将第二步的相邻点和第三步的非相邻点依序对号入座到图的组合模式（见第四步图）。

从图 9 看出，共有 8 个相邻点、2 个非相邻点，相邻点加非相邻点之和为 10。相邻点和非相邻点的组合数字正是以“1”“2”“3”“4”“5”5 个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合，其组合等式为 $C_5^2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$。可见，图 8 的面与面之间的关系是组合关系，图的模式是组合模式。此证。

综上证明，得出结论，图的相邻点的组合数字和非相邻点的组合数字正是以图中 n 个面的编号为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合数字，因此，图的面与面之间的关系不是排列关系，而是组合关系；图的模式不是排列模式，而是组合模式。

我们已知，图的面与面之间的关系是组合关系。那么，其理论依据是什么？

4.　第四个要弄清楚的问题：图的面与面之间的组合关系与图的形成原理

本人的研究结果表明，图的面与面之间的关系之所以是组合关系，这是由图的形成原理所决定的。

我们知道，四色猜想命题中所说的图，是指由若干个面组成的整体，而面则是组成这个整体的主体，用工业语言来说，面是组成图的“组装原件”。事实证明，图的形成过程就是一个面又一个面组合形成为一个整体的过程，任何一个图都是由一个面又一个面组合形成的整体。现予以作图证明：

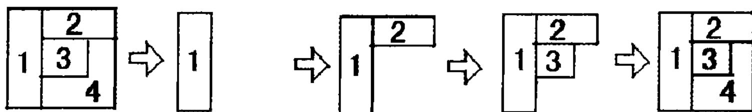


图 10 及其组合形成过程示意图

从图 10 看出，该图之所以成为一个由 4 个面组成的图，正是从 1 个面→由 2 个面连接组合→由 3 个面连接组合→由 4 个面连接组合的过程。

可见，在四色猜想命题中，任何一个图都是由若干个面连接组合形成的整体。这就是图的形成原理。因此，图的面与面之间的关系为组合关系。

综本文所证，归根结底，破解四色猜想命题的切入点就是图的形成原理。

本来，实践的规律明确地告诉我们，不懂得收音机的原理，就谈不上懂得对收音机的维修；不懂得某项技术原理，就谈不上懂得对该项技术的操作。同样的道理，四色猜想命题讲的是图的着色区分，很显然，不弄清楚图的形成原理，不弄清楚图的“组装原件”——面在组成图这个整体时，它们之间的关系是一种什么关系，当然也就谈不上找到破解四色猜想命题的正确答案。本人正是走出“面的数量”怪圈，从图的形成原理这个切入点入手，发现了图的面与面之间的关系是组合关系，图的模式是组合模式，进而找到了图的着色区分定理。运用图的着色区分定理，不仅对“一字状结构的图为什么仅需用2色区分”“梳子状结构的图为什么仅需用3色区分”“梯子状结构的图为什么仅需用4色区分”的问题可以作出科学证明，而且对“展现在平（球）体表面的图为什么仅需用4色区分”“展现在环体（见图11）表面的图为什么仅需用5色区分”“展现在丁环体（见图12）表面的图为什么仅需用6色区分”“展现在8字连环体（见图13）表面的图为什么仅需用7色区分”的命题也可以作出科学证明。本人发现的图的着色区分定理是n色区分的全通定理，它完全否定了四色猜想命题是“真的机器证明”之说。



图11

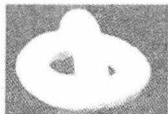


图12

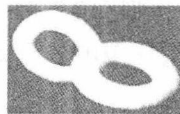


图13

2009年9月16日（完稿）

（本文发表于《科技资讯》2009年第32期）

色的拓扑作用及物体表面、面、线、点的关系

摘　要　本文通过客观现实中的实例和作图证明的方法，论证了色的拓扑作用以及物体表面、面、线、点之间的关系，指出了在特定条件下物体表面与图具有同一个整体的关系。

关键词　物体表面　面　点　色　拓扑作用　置换　等价关系

本人的研究结果表明，物体表面、面、图、色四者乃是四色猜想命题的四个要素。在四色猜想命题中，色之所以是一个要素，在于它不仅起到区分相邻面（即相邻区域）的作用，而且它还起到重要的拓扑作用。研究证明，正是在色的拓扑作用下，物体表面与面、面与线与点具有等价关系，在特定条件下可以置换。

1.　色的拓扑作用是存在于客观事物之中的

在现实中，我们会遇到这样的事实，当一个宽为 10 厘米、长为 100 厘米的面出现在墙壁上，并用同一种颜色着满整个面时，人们可能把这个面称之为线，不称之为面（见图 1）。

图 1

同样的道理，我们将一个其直径为 10 厘米的圆面用同一种颜色着满它时，人们可能把这个圆面称之为点，不称之为面（见图 2）。

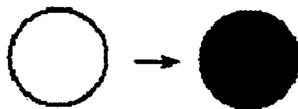


图 2

显然，图 1 的面之所以变成线，是因为着满同一种颜色的缘故；图 2 的面之所以变成点，也是因为着满同一种颜色的缘故。这都是色所起到的作用，而这个作用，正是色的拓

扑作用。可见，色的拓扑作用是存在于客观之中的。

2. 色的拓扑过程

色的拓扑过程，是指把一个物体表面或一个面作为一个着色整体，将这个整体着满一种颜色为标志的完成始末。这个过程既可是有序、有方向的着色完成过程，也可是无序、无方向的着色完成过程，总之是以被着色的整体着满一种颜色为标志。因此，色的拓扑过程即是着色的完成过程。

所谓有序、有方向的着色完成过程，是以 *A* 为着色起点，以 *B* 为着色终点，对被着色整体由起点沿着有序的走向至终点的着色完成过程。如图 3、图 4 所示。



图 3



图 4

所谓无序、无方向的着色完成过程，是既无确定的起点又无确定的终点，对被着色整体进行无序的随意的着色完成过程。如图 5 所示。



图 5

其实，在现实中，对被着色整体的着色完成过程是千变万化的，如着色工具不同或着色方法不同，其着色完成过程也不同。

以图 1 为例，假如着色工具是一把 10 厘米宽的刷子，那么，着色时，沿着一条直线着色就可完成着色过程（如图 6 所示）；假如其着色工具是一支 0.3 毫米粗的签字笔，那么，其着色完成过程确实要经一番周折（如图 7 所示）。



图 6

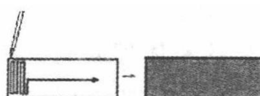


图 7

在现实中，用染缸染衣服，其实也是一个着色完成过程。不管这件衣服是一件什么样的衣服，只要放进染缸，其整件衣服则换成了染料的颜色。染缸染衣服的着色完成过程，完全是一个无序、无方向的着色完成过程。

可见，色的拓扑过程既是复杂的着色完成过程，又是简单的着色完成过程。而且，这个过程使人们难以理解和接受。因此，也就没能发现色的拓扑作用。但是，无论人们认可不认可，色的拓扑作用是存在于客观之中的。

3. 在色的拓扑作用下，面与线与点具有等价关系

在数学的理论中，面、线、点是三个完全不同的概念。然而，在四色猜想命题中，由于色的拓扑作用，不仅面与线与点具有等价关系，而且各种不同的面都可置换为点或线。为此，现予以作图证明：

例证 1

如图 8 所示，一个五角星面，应用拓扑原理，置换为圆面或长方形面，经着满色后则成了一个点或一条线。可见，在色的拓扑作用下，面可置换为点或线。此证。

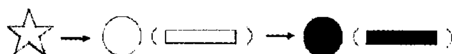


图 8

例证 2

又如图 9 所示，一个圆点和延伸出 7 条直线组成的实体，先把它理解为是一个着满一种色的面，然后把它还原于着色前的原面，再应用拓扑原理置换为圆面或长方形的面，最后着满一种色，使之成为点或线。此证。



图 9

例证 3

没着色的不同形状的面与已着色的不同形状的面，应用拓扑原理，在色的拓扑作用下，最终会成为同一体，使之实现相互置换。以图 8 的五角星面和图 9 的实体为例。

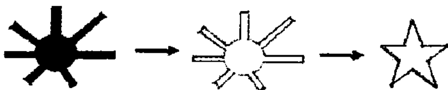


图 10

把原图 9 的实体理解为是一个着满一种色的面，然后把它还原于着色前的原面，再运用拓扑原理变换成一个五角星形状的面（如图 10 所示）。同样的道理，运用拓扑原理，将原图 8 的五角星面置换为图 9 的实体着色前的原面，然后将其着满一种颜色，使之成为图

9 实体（如图 11 所示）。

可见，在色的拓扑作用下，任何形状不同的面，不论它是已着满色的面还是没有着色的面均可拓扑为“点”或“线”，它们之间均可相互置换。此证。

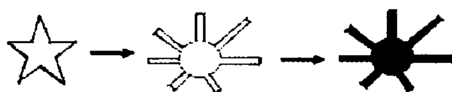


图 11

综图 8 至图 11 的证明，可作这样的结论：

结论 1　在色的拓扑作用下，当面与色融为一体时，面与线、与点也就融为一体，两者在本质上已没有了区分，此时，面就是扩大了的线，是扩大了的点，而线和点就是缩小了的面。这表明面与线、与点存在着等价关系，在特定条件下，可以相互置换。

结论 2　任何一个面都源生于点（线），都可置换统一于点（线）。这就是色的拓扑原理（且看图 12）。

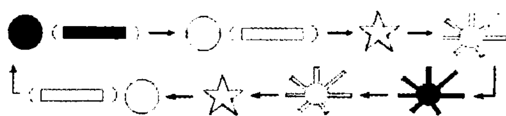


图 12　色的拓扑原理图

4.　在色的拓扑作用下，物体表面与面存在着等价关系

从传统数学的观念来说，物体表面与面的概念也是不同的。但在色的拓扑作用下，物体表面与面也可以融为一体，物体表面可置换为面。

事实 1　纸箱作为一个物体，纸箱的表面就是纸箱的物体表面。然而，当我们将这个纸箱完好无损地拆展开时，那么，这个纸箱的物体表面就变成了一个面（如图 13 所示）。

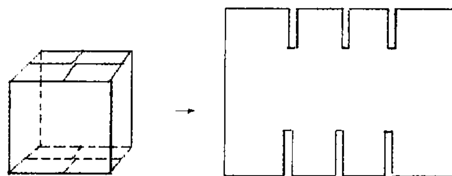


图 13

事实 2　狐狸作为一个物体，狐狸的皮就是狐狸的物体表面。然而，当猎人将一张狐狸皮展挂在墙上时，这张狐狸皮就是一个面（如图 14 所示）。

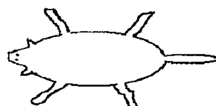


图 14

以上两例仅是事实证明，现进行作图证明：

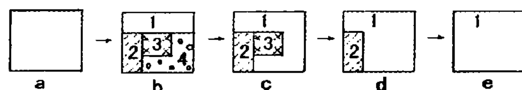


图 15

如图 15 所示，a 是一张纸的平体表面，我们直接在这个物体表面作图，如 b 所示，是由 4 个面组成。现在运用逆向思维和并减的方法来予以证明：第一次，将“4”面与“1”面合并为“1”面（即着同一种颜色），如 c 所示，则为由 3 个面组成；第二次，再将“3”面与“1”面合并为“1”面（即着同一种颜色），如 d 所示，则为由 2 个面组成；第三次，又将“2”面与“1”面合并为“1”面（即着同一种颜色），如 e 所示，则为由 1 个面组成。此时，a 与 e 完全是同一个整体。从这个意义上说，物体表面与 e 的“1”面在本质上已没有本质的区别。可见，物体表面可以置换为面。

对于物体表面与面的关系可用下面一段文字来表述：

事实证明：当物体表面为清一色，没有被分划为若干部分、没有成为图的载体时，物体表面与面没有本质的区别，存在着等价的关系，即任何一个形状不同的物体表面均是一个完整的“面”。物体表面之所以是物体表面，之所以有区别于面，唯有在它被分划为若干部分而成为图的载体时，才能得到体现。它们的区别就在于，物体表面是图的载体，而面是组成图的主体。

还应指出的，当物体表面作为一个完整的“整体”直接被分划为若干部分时，图完全遮盖住了物体表面，物体表面与由若干个面组成的图也就融为一体——即同一个整体（如图 15 所示）。因此，物体表面与图存在着同一个整体的关系。

综上所证，物体表面与面、面与线与点之所以存在着等价关系，在特定环境中可以置换，全在于色起着积极的促成作用。

笔者要予以指出的，人们对四色猜想命题不能作出科学证明，其中原因之一，正是忽视了色的拓扑作用。本文对色的拓扑作用及物体表面、面、线、点之间的关系和物体表面与图的关系之论证，对于人们寻找到破解四色猜想的正确答案，具有十分重要意义。因为，本人正是从发现色的拓扑作用及其原理中，发现了图的形成原理及图的本质，进而发现了“为什么展现在不同的物体表面的图其仅需用颜色区分的种数也不同”的这一命题的奥秘，并找到了破解这一命题（包含四色猜想命题）的定理——“图的着色区分定理”。

2009 年 10 月 18 日（完稿）

（本文发表于《科技资讯》2010 年第 2 期）

四色猜想命题中的第三种假象

摘　要　本文以对图的相邻点点数和非相邻点点数是否产生影响、对图的需用颜色区分种数是否产生影响为检验依据，运用作图证明的方法，对“面的编号是以全排列数出现在图的整体之中”这一表面现象进行了论证，得出了它是假象的结论。

关键词　四色猜想　表面现象　假象　相邻点　非相邻点　图的组合模式

以笔者的观点看来，四色猜想命题是一个典型的被事物表面现象遮住了事物本质的数学命题。四色猜想命题的第三种表面现象，是指“面的编号是以全排列数出现在图的整体之中”这一现象。本人研究结果表明，面的编号以全排列数出现在图的整体之中的可能性是存在的，但由于它既不对图的相邻点点数和非相邻点点数产生影响，也不对图的需用颜色区分的种数产生影响，因此，它完全是一种假象。

1.　四色猜想命题中的三种表面现象

本文说的四色猜想命题中的三种表面现象，是指：“面的数量对图的需用颜色区分的种数的影响”、面与面之间关系的“多么复杂”、“面的编号是以全排列数出现在图的整体之中”。在这三种表面现象中，前两种是源自于地图着色的表面现象，是四色猜想命题的不可理解性存在的两个方面，而第三种表面现象则是人们在研究四色猜想命题中的一种设想。

本人研究结果表明，这三种表面现象都是假象。对于前两种表面现象，笔者在发表于《科技资讯》2009 年第 32 期的《破解四色猜想命题的切入点在哪里》一文中均予以了论证，运用排除法将“面的数量对图的需用颜色区分的

种数的影响”排除在图的需用颜色区分种数的决定因素之外，同时通过作图证明方法揭开了面与面之间“多么复杂”的面纱——图的面与面之间的关系只不过是“组合关系”而已，图的结构模式只不过是“C_N^2 组合模式”而已。至于第三种表面现象“面的编号是以全排列数出现在图的整体之中”，又是一种什么情况呢，本文将揭开它的真面目。

2. 图的组合模式与图的需用颜色区分

定义 1　相邻面　即彼此之间有共同边界线的面。

定义 2　非相邻面　即彼此之间没有共同边界线的面。

定义 3　全相邻面　即与图中任何一个面均有共同边界线的面。

定义 4　相邻点　是用以表示两个相邻面关系的数学符号。即是将相邻的两个面的编号分别写在一个圆圈内组合为一组组合数字，这个圆圈和圆圈内的共同边界线以及组合数字就称之为相邻点（如图 1 组合模式中“⑫”就是表示“1”与“2”两个相邻面关系的相邻点）。

定义 5　非相邻点　是用以表示两个非相邻面关系的数学符号。就是将非相邻的两个面的编号分别写在两条竖线（这两条竖线是表示非相邻的意思）的两侧边，并组合为一组组合数字，这两条竖线和组合数字称之为非相邻点（如图 1 组合模式中“2 ‖ 4”就是表示“2”与“4”两个非相面的非相邻点）。

定义 6　图的结构模式　就是用以反映图的面与面之间的相邻和非相邻情况的一种数学建模。它可通过将图的各个相邻点、非相邻点的组合数字，对号入座到 C_N^2 组合模式中反映出来。因此，图的模式就是图的 C_N^2 组合模式。

四色猜想命题讲的是图的需用颜色区分的问题。本人的研究结果表明，图的组合模式与图的需用颜色区分有着密切的联系，而图的组合模式是由相邻点和非相邻点组成，相邻点点数占的比例数直接影响图的需用颜色区分的种数。请看下面 3 个图的比较证明：

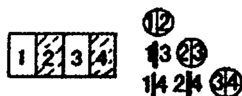


图 1 及其组合模式

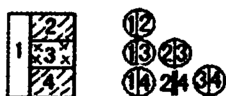


图 2 及其组合模式

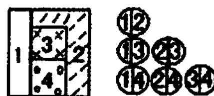


图 3 及其组合模式

从图1及其组合模式中可看出，图1的面的数量4个，图的组合模式由3个相邻点和3个非相邻点组成，$C_4^2=3+3=6$，相邻点点数与非相邻点点数的比例为3：3，图的4个面仅需用2色区分。

从图2及其组合模式中可看出，图2的面的数量4个，图的组合模式由5个相邻点和1个非相邻点组成，$C_4^2=5+1=6$，相邻点点数与非相邻点点数的比例为5：1，图的4个面仅需用3色区分。

从图3及其组合模式中可看出，图3的面的数量4个，图的组合模式由6个相邻点和0个非相邻点组成，$C_4^2=6+0=6$，相邻点点数与非相邻点点数的比例为6：0，图的4个面需用4色区分。

图1与图2的比较证明

现将图1与图2作比较，两个图的面的数量同为4个，图2的相邻点比图1的相邻点多2个，非相邻点少2个，相邻点点数与非相邻点点数的比例为5：1，高于图1的3：3，图的需用颜色比图1多1种。这证明，图的组合模式中的相邻点点数与非相邻点点数的比例高，其图的需用颜色区分种数就多。

图2与图3的比较证明

现将图2与图3作比较，两个图的面的数量同为4个，图3的相邻点比图2的相邻点多1个，非相邻点少1个，相邻点点数与非相邻点点数的比例为6：0，高于图2的5：1，图的需用颜色比图2多1种。这证明，图的组合模式中的相邻点点数与非相邻点点数的比例高，其图的需用颜色区分种数就多。

综图1至图3的证明，得出结论：图的组合模式中的相邻点点数与非相邻点点数的比例对图的需用颜色区分种数有着密切联系，在图的面的数量相同的情况下，相邻点点数与非相邻点点数的比例高，则图的需用颜色区分种数就多。

3. 对第三种表面现象的证明

根据图1至图3的证明所得出结论，笔者认为，检验“面的编号是以全排列数出现在图的整体之中”这一表面现象是不是假象，其依据就是看它对图的相邻点点数和非相邻点点数有没有产生影响，对图的需用颜色区分种数有没有产生影响。如答案是肯定的，则不是假象；如是否定的，则是假象。为此，现以图1、图2、图3为例予以逐一证明。

图1的证明

从图 1 及其组合模式看出，该图是一个由 4 个非全相邻面组成的图，需用 2 色区分；其组合模式由 3 个相邻点和 3 个非相邻点组成，$C_4^2=3+3=6$。下面按其面的编号数“1、2、3、4”的全排列数字，逐一编写在图的 4 个面上，如图 4 所示。

排列数字					
1234	1243	1342	1324	1432	1423
2314	2341	2413	2431	2134	2143
3412	3421	3214	3241	3124	3142
4123	4132	4213	4231	4312	4321

图 4 “1，2，3，4” 排列数组图之一

从图 4 看出，“1，2，3，4”的全排列数字共为 24 组，按其排列数字编写的图也有 24 个。此 24 个图的组合模式清楚地告诉我们：

1. 尽管 24 个图的 4 个面的编号顺序不同（即排列数字不同），但 24 个图的组合模式均由 3 个相邻点和 3 个非相邻点组成，即 $C_4^2=3+3=6$，与图 1 相同。这证明，图的 4 个面的编号顺序在变动，但图的组合模式中的相邻点点数和非相邻点点数没有变动。

2. 24 个图均仅需用 2 色区分，与图 1 相同。这证明，图的 4 个面的编号顺序在变动，对图需用颜色区分的种数不产生影响。

3. 24 个图的组合模式出现了“双胞胎”现象，即每一个图的组合模式均可找到与其每一组相邻点组合数字和每一组非相邻点组合数字完全相同的另一个图的组合模式。如“1，2，3，4”排列数字的图的组合模式，与“4，3，2，1”排列数字的图的组合模式完全相同。这证明图的面与面之间的关系不是排列关系。

图 2 的证明

从图 2 及其组合模式看出，该图是一个由 2 个全相邻面和 2 个非全相邻面组成的图；其组合模式是由 5 个相邻点和 1 个非相邻点组成，$C_4^2=5+1=6$，图的 4 个面仅需用 3 色区分。下面按其面的编号数“1、2、3、4”的全排列数字，逐一编写在图的 4 个面上，如图 5 所示。

从图 5 看出，“1，2，3，4”的全排列数字共为 24 组，按其排列数编写的图也有 24 个。此 24 个图的组合模式清楚地告诉我们：

1. 尽管 24 个图的 4 个面的编号顺序不同（即排列数字不同），但 24 个图的组合模式均由 5 个相邻点和 1 个非相邻点组成，即 $C_4^2=5+1=6$，与图 2 相

同。这证明，图的4个面的编号顺序在变动，但图的组合模式中的相邻点点数和非相邻点点数没有变动。

2. 24个图均仅需用3色区分，与图2相同。这证明，图的4个面的编号顺序在变动，对图需用颜色区分的种数不产生影响。

3. 24个图的组合模式出现了“4胞胎”现象，即每一个图的组合模式均可找到与其相邻点组合数字和非相邻点组合数字完全相同的另3个图的组合模式。如“1，2，3，4”、“1，4，3，2”、“3，4，1，2”、“3，2，1，4”此4组排列数字的图的组合模式，完全相同。这证明图的面与面之间的关系不是排列关系。

图5 “1，2，3，4”排列数组图之二

图3的证明

从图2及其组合模式可看出，该图是一个由4个全相邻面组成的图，其组合模式是仅由6个相邻点组成，$C_4^2=6+0=6$。下面按其面的编号数“1、2、3、4”的全排列数字，逐一编写在图的4个面上，如图6所示。

从图6看出，“1，2，3，4”的全排列数字共为24组，按其排列数字编写的图也有24个，此24个图的组合模式清楚地告诉我们：

1. 尽管24个图的4个面的编号顺序不同（即排列数字不同），但24个图的组合模式均由6个相

图6 “1，2，3，4”排列数组图之三

邻点和0个非相邻点组成，即 $C_4^2=6+0=6$，与图3相同。这证明，图的4个面的编号顺序在变动，但图的组合模式中的相邻点点数和非相邻点点数没有变动。

2. 24个图均需用4色区分，与图3相同。这证明，图的4个面的编号顺序在变动，对图需用颜色区分的种数不产生影响。

3. 24个图的组合模式出现了“复印件”现象，即24个图的组合模式完全是一个模样。这有力证明图的面与面之间的关系不是排列关系。

综图4至图6三组组图的证明，得出

结论1 只变动面的编号顺序，这对图的组合模式的相邻点点数和非相邻点点数不产生任何影响，对图的需用颜色区分种数也不产生任何影响，尤其是由全相邻面组成的图，“面的编号是以全排列数字出现在图的整体之中”的现象则完全失去了存在的意义。由此可见，“面的编号是以全排列数字出现在图的整体之中”这一表面现象是一种假象。

结论2 图的面与面之间的关系不是排列关系，而是组合关系。

在此，值得一提的是，本人的研究成果再次提示四色猜想命题的研究者们：四色猜想命题的研究不仅要走出“面的数量”这个“怪圈”，更应走出“排列数”这个“迷魂阵”，而图的组合模式才是四色猜想命题研究的正确方向，因为，本人的研究成果表明，打开四色猜想命题之锁的金钥匙就藏在图的组合模式之中。

2010年1月16日（完稿）

（本文发表于《科技创新导报》2010年第7期）

图的形成原理与图的模式及图的本质

摘　要　本文沿着图的形成原理这个切入点，运用正确的思维方法和比较证明方法，对四色猜想命题中的图的面与面之间的关系、图的模式、图的本质进行了论证，得出了“图的形成原理是组合形成整体或整体被分划的过程”“图的面与面之间的关系是组合关系”“图的模式是 C_n^2 组合模式”“图的 C_n^2 组合模式就是图的本质”的结论。这些结论是本人在研究四色猜想命题方面的重要成果，也是“张尔光组合说”的重要组成部分。

关键词　四色猜想　图　面　色　组合　组合模式　相邻　非相邻

笔者在拙作《破解四色猜想命题的切入点在哪里》（见《科技资讯》2009年第32期）中明确指出，图的形成原理乃是破解四色猜想命题的切入点。其实，找到了切入点，这仅是破解四色猜想命题的第一步。要真正找到解开四色猜想命题之锁的金钥匙，还须沿着这个切入点，对“图的面与面之间关系是什么关系”“图的模式是什么模式”“图的本质是什么”等问题作出解答或证明。本文就这些议题进行论证。

1.　图的形成原理

本文论题所说的图，是指四色猜想命题中的图，即是由若干个面组合形成的整体。那么，图的形成原理是什么样的原理呢？现予以作图证明。

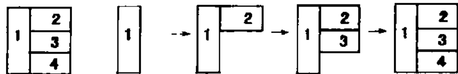


图1　　　图2 图1形成过程示意图

如图1所示，是一个由4个面组合形成的整体。从图2可看出，图1是由1个面→2个面组合→3个面组合→……这样一个循序逐增的组合形成

过程。

但用逆向思维方式去分析，图1它又是从一个完整的“面”→分划为2个面→分划为3个面→……这样一个循序逐步分划的过程（见图3）。

(原图1)

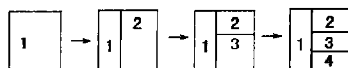


图3 （图1的分划过程示意图）

可见，图的形成过程既是面的数量循序逐增的组合形成为一个整体的过程，又是一个整体被循序逐步分划为若干个面的过程。这就是图的形成原理。组合形成与分划整体，正符合对立统一规律。

要指出的是，(1) 循序逐增和循序逐步分划中的“循序”两字是图的形成原理的关键词，只有正确理解“循序”两字，才能真正读懂图的形成原理。(2) 图的形成过程虽是一个整体被分划为若干个面的过程，而面与面之间的关系属于组合关系的性质没有变（见后文图9的证明）。

2. 面在图中的分类与图的类型

定义1　相邻面　即彼此之间有共同边界线（即存在相邻关系）的面。

定义2　非相邻面　即彼此之间无共同边界线（即不存在相邻关系）的面。

定义3　全相邻面　即与图中任何一个面均有共同边界线（即均存在相邻关系）的面。

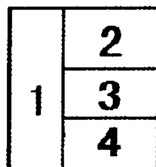
定义4　图的类型　是以组成图这个整体的所有面的相邻情况和非相邻情况作为依据来予以划分的一种归纳。

2.1　面在图中的分类

根据面与面之间的相邻情况和非相邻情况，面的分类可分为“全相邻面”和“非全相邻面”两种。全相邻面只具有相邻面一个“身份”；非全相邻面具有“相邻面”“非相邻面”两种“身份”，即其相对于与其存在相邻关系的一部分面来说是“相邻面”，而相对于与其不存在相邻关系的另一部分面来说则又是“非相邻面”。现以图1为例进行分析。

从图1可看出，共有4个面，“1”与“2”“3”“4”3个面均存在相邻关

系，所以是全相邻面，其相对于“2”“3”“4”3个面来说是相邻面；“2”仅与“1”“3”2个面相邻，但与“4”这个面非相邻，所以，“2”是非全相邻面，其相对于“1”“3”2个面来说是相邻面，而相对于“4”这个面来说却是非相邻面；“3”与“1”“2”“4”3个面均存在相邻关系，所以是全相邻面，其相对于“1”“2”“4”3个面来说是相邻面；“4”仅与“1”“3”2个面相邻，但与“2”这个面非相邻，所以，“4”是非全相邻面，其相对于“1”“3”2个面来说是相邻面，而相对于“2”这个面来说却是非相邻面。可见，图1的4个面中，“1”“3”两个面是全相邻面，只有相邻面这个“身份”，不存在非相邻面这个“身份”，而属于非全相邻面的“2”“4”两个面同时具有相邻面和非相邻面这两个“身份”。总之，面在图中的分类，只能划分为全相邻面和非全相邻面两种，面与面彼此之间的关系只有相邻面和非相邻面之区分。



（原图1）

2.2 图的类型

在四色猜想命题中，图的类型可划分为三种：一是由非全相邻面组成的图；二是由全相邻面和非全相邻面组成的图；三是由全相邻面组成的图。

2.2.1 由非全相邻面组成的图图例证明

如图4所示，是一个由4个面组成的图。从该图可看出，“1”“2”“3”“4”4个面中无全相邻面，均为非全相邻面。可见，图4是一个由4个非全相邻面组成的图。

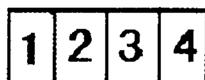
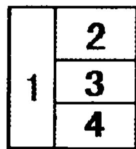


图4

2.2.2 由全相邻面和非全相邻面组成的图图例证明

实际上原图1就是一个由全相邻面和非全相邻面组成的图。从前文对该图4个面的分析中得知，4个面中“1”“3”2个面是全相邻面，“2”“4”2个面是非全相邻面。故此，图1是一个由2个全相邻面和2个非全相邻面组成的图。



（原图1）

2.2.3 由全相邻面组成的图图例证明

如图5所示，是一个由4个面组成的图。从该图可看出，图中“1”“2”、“3”“4”4个面彼此之间均相邻，不存在非相邻面。可见，图5是一个由4个全相邻面组成的图。

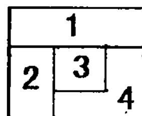


图5

3. 图的面与面之间的关系与图的模式

定义5 相邻点 是用以表示两个相邻面关系的一种数学符号。就是在相邻两个面的共同边界线画上一个圆圈，并将这两个面的编号分别写在圆圈内组合为一组数字，这个圆圈和圆圈内的共同边界线以及组合数字就称之为相邻点（如图8中“⑴⑵”就是表示“1”与“2”两个相邻面关系的相邻点）。

定义6 非相邻点 是用以表示两个非相邻面关系的一种数学符号。就是将非相邻的两个面的编号分别写在两条竖线（这两条竖线是表示非相邻的意思）的两侧边，并组合为一组数字，这两条竖线和组合数字称之为非相邻点（如图8中“2 ‖ 4”就是表示“2”与“4”两个非相面的非相邻点）。

定义7 图的模式 就是用以反映图的各面彼此之间相邻关系和非相邻关系情况的数学建模。图的模式由相邻点组成或由相邻点和非相邻点共同组成。因图的各个相邻点的组合数字和非相邻点的组合数字与 C_n^2 组合模式数字相一致。因此，图的模式就是图的 C_n^2 组合模式。图的 C_n^2 组合模式是图的本质的真实反映，是检验此图与彼图的内部联系是否相同的标准。

本人的研究结果表明，图的面与面之间的关系是组合关系，图的模式是 C_n^2 组合模式。

我们知道，数学中的组合与排列的区别在于：（1）排列数字的排列，所取的元素相同，但排列顺序可不同；而组合数字的组合，所取的元素相同，但与排列顺序无关。（2）组合模式与排列模式也不同。以从 n 个元素中取出2个元素组合、排列为例（见图6、图7），C_n^2 组合模式是三角矩阵，模式中的组合数字的组数呈加法递增，而 P_n^2 排列模式是方矩阵，模式中的排列数字的组数呈乘法递增。

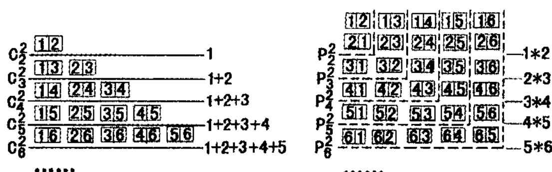


图6 C_n^2 组合模式

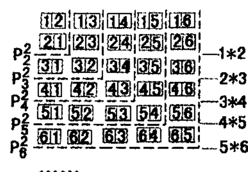


图7 P_n^2 排列模式

那么，图的面与面之间关系究竟是排列关系还是组合关系呢？图的模式是排列模式还是组合模式呢？为此，现以图1为例进行证明。

3.1 求证图的面与面之间关系的证明方法（步骤）

第一步 循着图 1 的形成过程将图的面添加上相邻点。

第二步 循着图 1 的形成过程有序地列出相邻点和非相邻点并自然形成为图的模式。

或是

第一步 循着图 1 的分划过程将图的面添加上相邻点。

第二步 循着图 1 的分划过程有序地列出相邻点和非相邻点，并自然形成为图的模式。

以上求证方法，可直接将相邻点组合数字和非相邻点组合数字对号入座到图的 C_n^2 组合模式中去。

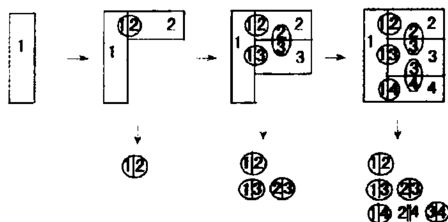


图 8 面与面之间关系的证明方法图之一

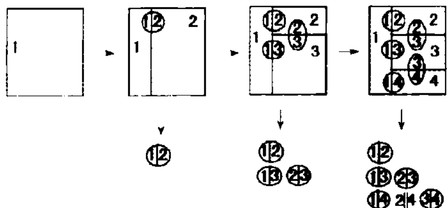


图 9 面与面之间关系的证明方法图之二

3.2 图的面与面之间关系是组合关系，图的模式是组合模式

现将图 8（含图 9）中的相邻点和非相邻点的组合数字以及形成的模式与图 6、图 7 比对一下，就不难看明白：

当图的面的数量为 1 个时，不存在相邻点，因此，不存在组合；

当图的面的数量为 2 个时，图的模式仅有 1 个相邻点，相邻点的组合数字“12”正是“1”“2”2 个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合，为 C_2^2 组合，组合等式为 $C_2^2=\frac{2\times1}{2\times1}=1$，正好与图 6 中的 C_2^2 相吻合；

当图的面的数量为 3 个时，图的模式共有 3 个相邻点，相邻点的组合数字“12，13，23”，正是“1”“2”“3”3 个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合，为 C_3^2 组合，组合等式为 $C_3^2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$，正好与图 6 中的 C_3^2 相吻合；

当图的面的数量为 4 个时，图的模式共有 5 个相邻点和 1 个非相邻点，相

邻点的组合数字和非相邻点的组合数字“12，13，23，14，24，34”，正是“1”“2”“3”“4”4 个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合，为 C_4^2 组合，组合等式为 $C_4^2=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$，正好与图 6 中的 C_4^2 相吻合。

由此得出结论：图的面与面之间关系是组合关系，不是排列关系，两个相邻面的关系是组合关系，两个非相邻面的关系也是组合关系；图的模式是 C_n^2 组合模式，绝不是排列模式。

综上证明，根据数学的组合原理，得：

图的面的数量与图的组合模式的关系等式可表示为

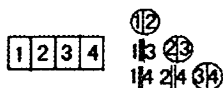
$C_n^2=\dfrac{n\times\ (n-1)}{2\times 1}$　　　（式中的“n”表示图的面的数量）

据此，图的组合模式与相邻点点数、非相邻点点数的关系等式可表示为

$C_n^2=y+z$

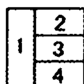
（式中 y 表示相邻点点数，z 表示非相邻点点数，当 $z=0$，则 $C_n^2=y$）

要指出的是，由非全相邻面组成的图和由全相邻面与非全相邻面组成的图，其图的组合模式是由相邻点和非相邻点组成（见图 10、图 11）；而由全相邻面组成的图，其图的组合模式仅由相邻点组成（见图 12）。



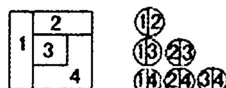
（原图 4 及其组合模式）

图 10



（原图 1 及其组合模式）

图 11



（原图 5 及其组合模式）

图 12

4.　图的 C_n^2 组合模式与图的本质

定义 8　图的本质　是指图的表面现象反映出来的图的内部联系的共同特征，是用以检验此图的内部联系与彼图的内部联系是否相同的标准。

本人的研究结果表明，图的本质就是图的 C_n^2 组合模式。它不仅具体、准确地反映了图的内部联系的情况（即各面彼此之间相邻关系和非相邻关系的情况），而且真实、科学地反映了图的内部联系的共同特征，是检验此图的内部联系与彼图的内部联系是否相同的准尺。

证明 1

如图 13 与图 14 两个图，同是由 6 个面组成的整体。表象看来，两个图完全不一样，那么它们的内部联系是不是一样呢？对此，只要将这两个图的组合模式作比较，就会发现，这两个图不仅相邻点的组合数字相同，而且非相邻点的组合数字也相同，面与面之间的相邻关系和非相邻关系的情况是完全一样。可见，此两个图的内部联系相同，图 13 与图 14 是两个内部联系是一样的图。

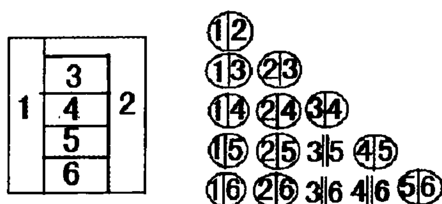


图 13 及其组合模式

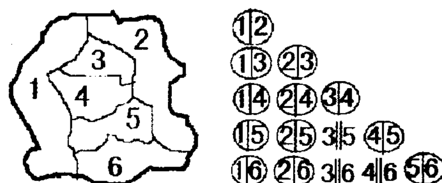


图 14 及其组合模式

证明 2

如图 15 与图 16 两个图，同是由 5 个面组成的整体。表象看来，两个图很为相似，那么它们的内部联系是不是一个样呢？对此，只要将这两个图的组合模式作比较，就会发现，这两个图不仅相邻点的组合数字有所不同，非相邻点的组合数字也有所不同，因而，面与面之间的相邻关系和非相邻关系的情况是不一样，着色种数也不一样。可见，图 15 与图 16 是两个内部联系有区别的不相同的图。

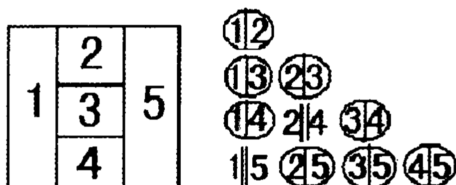


图 15 及其组合模式

综图 13 至图 16 的证明，得出结论：图的 C_n^2 组合模式是图的本质反映，是检验此图与彼图的内部联系是否相同的准尺。也就是说，看一个图与另一个图是否相同，不需对图进行整体拓扑，只要看这两个图的组合模式中的相邻点的组合数字、非相邻点的组合数字是否一样，如完全一样则相同，否则就不相同。

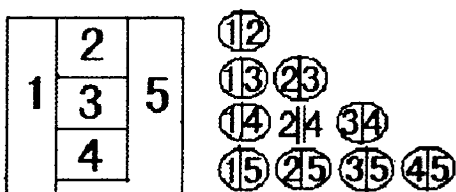


图 16 及其组合模式

常言道："万变不离其宗"。在四色猜想命题中，"万变"是指图的表面现象，"其宗"是指图的本质。尽管图的表面现象千变万化，但最终不离图的本质，都可在图的 C_n^2 组合模式中得到真实的科学的反映。

笔者认为，人们之所以把四色猜想命题定之为“真的机器证明”之命题，不能对这个命题作出科学的证明，其根本原因就在于没有抓住图的本质，或者说抓错了图的本质（如把图的面与面之间的关系定之为排列关系）。要想找到解开四色猜想命题之锁的金钥匙，唯有抓住抓准图的本质才能实现。

2009 年 12 月 28 日（完稿）

（本文发表于《科技创新导报》2010 年第 17 期）

图的着色证明与图的着色定理

——兼对四色猜想命题的证明

摘　要　本文续接拙作《图的形成原理与图的模式及图的本质》的证明，依据图的面与面之间的关系和组合原理，指出四色猜想不属于“真的机器证明之命题”，而是属于三角数学范畴的命题；应用“同中求异、异中求同”的证明方法和数学建模方式，对五道雷同于四色猜想命题的命题进行了逐一证明，进而对“为什么展现在不同物体表面的图其仅需用颜色区分的种数也不同的问题”（包含“为什么展现在平体表面的图仅需用4色就足以将其各面区分开的问题”）作出证明。

关键词　四色猜想　组合模式　三角矩阵　分划法　物体表面的全相邻力　图的相邻面的组合力　极限数　仅需着色种数

本文论题所说的图，是指四色猜想命题中的地图，即是由若干个面（即区域）组合形成的整体。本人研究结果表明，图的模式是 C_N^2 组合模式（称之为大组合，以 C_N^2 来表示）；图的相邻面的组合力（称之为小组合，以 C_n^2 来表示）与图的需用着色种数（用色字的第一个汉语拼音字母“S”来表示）有着密切联系，前者既是后者的决定因素，又是制约因素；而图的相邻面的组合力受物体表面的全相邻力的制约。展现在不同物体表面的图，之所以其仅需用着色种数不同，是在于物体表面的全相邻力的极限数（以力字汉语拼音的第一个字母“L”来表示）不同和图的相邻面的组合力的极限数（以“C_n^2”来表示）不同，“L”与“C_n^2 的 n”与“S”是等于关系，定理是：$L = C_n^2$ 的 $n = S$

四色猜想命题之所以成立，是在于平体（含球体及其他同胚体，下文同）表面的全相邻力的极限数为“4”（即最多只能做到使“4个面”全相邻），其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2。即其 $L = 4$，C_n^2 的 $n = 4$，所以 $S = 4$。

1. 图的相邻面的组合力与图的着色证明

定义1 图的形成原理 是指由若干个面形成一个整体的过程规律。图的形成过程既是面的数量循序逐增的组合形成为一个整体的过程，又是一个整体被循序逐步分划为若干个面的过程。

定义2 相邻面 即彼此之间有共同边界线的面。

定义3 非相邻面 即彼此之间没有共同边界线的面。

定义4 全相邻面 即与图中任何一个面均有共同边界线的面。

定义5 相邻点 是用以表示两个相邻面关系的一种数学符号（如图1中“⑫”就是表示“1”与“2”两个相邻面关系的相邻点）。

定义6 非相邻点 是用以表示两个非相邻面关系的一种数学符号（如图1中“2‖4”就是表示“2”与“4”两个非相面的非相邻点）。

定义7 图的模式 是用以反映图的面与面彼此之间相邻关系和非相邻关系情况的数学建模。图的模式是 C_N^2 组合模式，而图的 C_N^2 组合模式是图的本质，是检验此图与彼图的内部联系是否相同的标准。

图的组合模式公式1：$C_N^2=\frac{N\times\ (N-1)}{2\times1}$ （公式中 N 表示面的数量）

图的组合模式公式2：$C_N^2=y+z$（公式中 y 表示相邻点点数，z 表示非相邻点点数，当 z 为0时，则 $C_N^2=y$）

以上定义和公式已在《图的形成原理与图的模式及图的本质》（刊于《科技创新导报》2010年第17期）作了解读和论证，本文不再赘述。

定义8 图的相邻面的组合力 是指图这个整体中相邻面之间形成的组合能力，它是以有几个相邻面彼此之间均具有组合关系为衡量标准。

1.1 “1”的三角矩阵是图的本质的最底层

笔者研究发现，图的 C_N^2 组合模式是图的本质，而由“1（含-1）”组成的三角矩阵才是图的本质的最底层。根据图的 C_N^2 组合模式中每个相邻点和非相邻点均为 C_2^2 组合这一证明结果，依照“$C_2^2=1$”的原理，将相邻点和非相邻点分别转换为“1”“-1”来表示，就

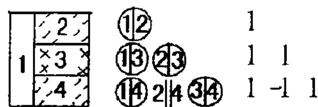


图1 及其组合模式和三角矩阵

可看出，图的 C_N^2 组合模式实质上是由"1"和"-1"组成的三角矩阵（如图1所示）。可见，四色猜想不属于"真的机器证明之命题"，而属于三角数学范畴的命题。

1.2 图的组合元素与图的区分元素

图的形成原理告诉我们，图是由若干个面组合形成的整体。据此，面无疑是图的组合元素。图的形成原理却又告诉我们，图是一个被分划为若干部分的整体。据此，面又是图的区分元素。这也就是说，有 n 个面组合形成的整体，则这个整体必定被分划为（即区分为）n 个面，组合元素是 n，其区分元素也是 n，两者是相等的。这一观点完全符合 C_n^2 组合与 C_n^n 组合相通的原理。见图2。

	C_n^2 组合	n	C_n^n 组合	
C_2^2	12	2	12	C_2^2
C_3^2	13 23	3	123	C_3^3
C_4^2	14 24 34	4	1234	C_4^4
C_5^2	15 25 35 45	5	12345	C_5^5
C_6^2	16 26 36 46 56	6	123456	C_6^6
	……	……	……	

图2　C_n^2 组合与 C_n^n 组合比对图

从图2看出，C_n^2 组合与 C_n^n 组合，两者组合数虽不等同，但两者整体的组合元素与区分元素均是等同的：C_3^2 组合的整体，其组合元素、区分元素是3，同样，C_3^3 组合的整体，其组合元素、区分元素也是3；C_4^2 组合的整体，其组合元素、区分元素是4，同样，C_4^4 组合的整体，其组合元素、区分元素也是4，其余依此类推。

C_n^2 组合与 C_n^n 组合相通的原理告诉我们，区分元素的量=组合元素的量。

1.3 四色猜想命题提出的一个思考题

四色猜想命题设定的条件是以色作为图的区分元素对图的组合元素——面作出区分。按照"区分元素的量=组合元素的量"这个原理，组成图这个整体的面是多少，需用着色种数就应是多少。而四色猜想命题告诉我们：平（球）体表面的图不论其面是多少，仅需用4色就足以将其各面区分开。即是说，任凭图的组合元素怎样升增，而图的区分元素到"4"这个数却不升增了。这给人们提出了一个值得思考的问题：是不是有一个极限数在制约着图的着色种数的升增呢？因为，"仅需用4色区分"中的"仅"字隐含着"限制条件"的意思，而"4"是区分元素的"仅限数"。那么，这个制约图的着色种数的极限数究竟是个什么极限数呢？为此，应用"同中求异、异中求同"的

证明方法进行求证。

1.4 图的相邻面的组合力与图的着色种数的关系

本人的研究结果表明，图的相邻面的组合力与图的着色种数具有等于关系。

例证 1

如图 3 所示，面的数量 3 个，图的相邻面的组合力为 C_2^2，图的着色种数为 2。现将图 3 增加 1 个面，如图 4 所示。从图 4 可看出，面的数量 4 个，但图的相邻面的组合力没因面的数量增加而提升，仍为 C_2^2，图的着色种数仍为 2。可见，面的数量对图的着色种数不起决定性作用。

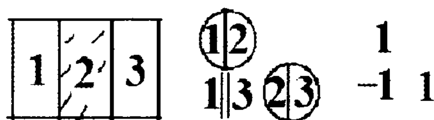


图 3 及其组合模式和三角矩阵



图 4 及其组合模式和三角矩阵

例证 2

现将图 3 的 3 个面的相邻情况作改动，使原来不相邻的“1”与“3”两个面相邻，如图 5 所示。从图 5 看出，面的数量 3 个没变，但图的相邻面的组合力由 C_2^2 提升为 C_3^2，图的着色种数也随之由 2 上升为 3。可见，图的相邻面的组合力对图的着色种数起着决定性作用。

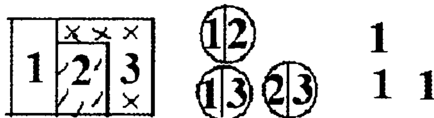


图 5 及其组合模式和三角矩阵

例证 3

现将图 4 的 4 个面的相邻情况作改动，使其 4 个面彼此之间均相邻，如图 6 所示。从图 6 看出，面的数量 4 个没变，但图的相邻面的组合力由 C_2^2 提升为 C_4^4，图的着色种数也随之由 2 上升为 4。可见，图的相邻面的组合力对图的着色种数起着决定性作用。

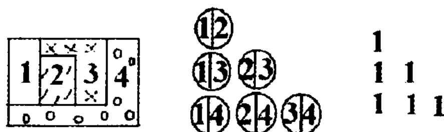


图 6 及其组合模式和三角矩阵

综图 3 至图 6 的证明，得出结论：图的相邻面的组合力与图的着色种数有着密切联系，前者对后者起着决定性作用，后者的增加有赖于前者的提升。

又，已知

图3和图4两个图的相邻面的组合力为C_2^2，图的着色种数为2，即C_n^2的$n=2$，$S=2$，可见，C_n^2的$n=S$；

图5的相邻面的组合力为C_3^2，图的着色种数为3，即C_n^2的$n=3$，$S=3$，可见，C_n^2的$n=S$；

图6的相邻面的组合力为C_4^4，图的着色种数为4，即C_n^2的$n=4$，$S=4$，可见，C_n^2的$n=S$。

依照归纳法，得

图的相邻面的组合力与图的着色种数有着相等关系，定理为：C_n^2的$n=S$

1.5 对五道雷同于四色猜想命题的命题的证明（五种不同结构的图的着色证明）

笔者根据图的着色结果，设置了与四色猜想命题相同条件的五道命题。

命题1　为什么一字状结构的图，不论其面的数量是多少，仅需用2色就足以将其各面区分开？如图7所示。

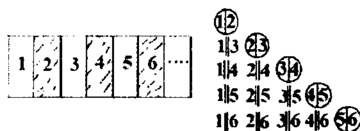


图7（一字状结构图及其组合模式）

命题2　为什么梳子状结构的图，不论其面的数量是多少，仅需用3色就足以将其各面区分开？如图8所示。

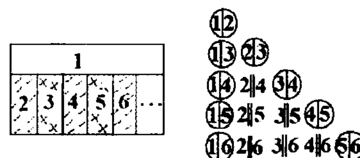


图8（梳子状结构图及其组合模式）

命题3　为什么梯子状结构的图，不论其面的数量是多少，仅需4色就足以将其各面区分开？如图9所示。

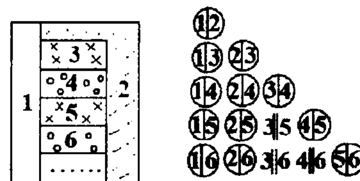


图9（梯子状结构图及其组合模式）

命题4　为什么环状结构的图，不论其面的数量是多少，仅需用3色就足以将其各面区分开，如图10所示。

命题5　为什么环抱状结构的图，不论其面的数量是多少，仅需用4色就足以将其各面区分开，如图11。

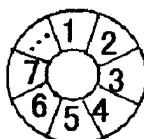


图10

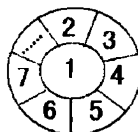


图11

现应用组合原理和数学建模方式对此五道命题逐一作出证明。

命题 1 证明（一字状结构的图的“仅需用着色种数”的证明）

面的数量	将各相邻点、非相邻点转换为 1、-1 后的三角矩阵	非相邻点 -1 形成的三角矩阵	抽出非相邻点 -1 后的三角矩阵	相邻面组合力	着色种数
2	C_2^2 1 1	—	C_2^2 1 1	C_2^2	2
3	C_3^2 -1 1 2	C_3^2 -1 1	C_3^2 1 1	C_2^2	2
4	C_4^2 -1 -1 1 3	C_4^2 -1 -1 2	C_4^2 1 1	C_2^2	2
5	C_5^2 -1 -1 -1 1 4	C_5^2 -1 -1 1 3	C_5^2 1 1	C_2^2	2
6	C_6^2 -1 -1 -1 -1 1 5	C_6^2 -1 -1 1 1 4	C_6^2 1 1	C_2^2	2
……	……	……	……	……	……

图 12　一字状结构的图仅需用着色种数分析图表

从图 12 看出，一字状结构的图自面的数量为 2 起，其相邻面的组合力为 C_2^2 没有变，其着色种数为 2 也没有变。即其相邻面的组合力最高为 C_2^2，其仅需用着色种数为 2。可见，一字状结构的图之所以仅需用 2 色区分，是在于其相邻面的组合力最高为 C_2^2。此证。

命题 2 证明（梳子状结构的图的“仅需用着色种数”的证明）

面的数量	将各相邻点、非相邻点转换为 1、-1 后的三角矩阵	非相邻点 -1 形成的三角矩阵	抽出非相邻点 -1 后的三角矩阵	相邻面组合力	着色种数
2	C_2^2 1 1	—	C_2^2 1 1	C_2^2	2
3	C_3^2 1 1 2	—	C_3^2 1 1 2	C_3^2	3
4	C_4^2 1 -1 1 3	C_4^2 -1 1	C_4^2 1 1 2	C_3^2	3
5	C_5^2 1 -1 -1 1 4	C_5^2 1 1 2	C_5^2 1 1 2	C_3^2	3
6	C_6^2 1 1 1 1 1 5	C_6^2 1 1 1 3	C_6^2 1 1 2	C_3^2	3
……	……	……	……	……	……

图 13　梳子状结构的图仅需用着色种数分析图表

从图 13 看出，梳子状结构的图在其面的数量为 3、相邻面的组合力提升到 C_3^2 后，没再提升，一直为 C_3^2 没有变，其着色种数也一直为 3 没有变，即其相邻面的组合力最高为 C_3^2，其仅需用着色种数为 3。可见，梳子状结构的图之所以仅需用 3 色区分，是在于其相邻面的组合力最高为 C_3^2。此证。

命题 3 证明（梯子状结构的图的“仅需用着色种数”的证明）

面的数量	将各相邻点、非相邻点转换为1、-1后的三角矩阵	非相邻点-1形成的三角矩阵	抽出非相邻点-1后的三角矩阵	相邻面组合力	着色种数
2	C_2^2 1 1		C_2^2 1 1	C_2^2	2
3	C_3^2 1 1 2		C_3^2 1 1 2	C_3^2	3
4	C_4^2 1 1 1 3		C_4^2 1 1 1 3	C_4^2	4
5	C_5^2 1 1 -1 1 4	C_2^2 -1 1	C_5^2 1 1 1 3	C_4^2	4
6	C_6^2 1 1 1 -1 1 5	C_3^2 1 -1 2	C_6^2 1 1 1 3	C_4^2	4
……	……	……	……	……	……

图 14　梯子状结构的图仅需用着色种数分析图表

从图 14 看出，梯子状结构的图在其面的数量为 4、相邻面的组合力提升到后 C_4^2，没再提升，一直为 C_4^2 没有变，其着色种数也一直为 4 没有变，即其相邻面的组合力最高为 C_4^2，其仅需用着色种数为 4。可见，梯子状结构的图之所以仅需用 4 色区分，是在于其相邻面的组合力最高为 C_4^2。此证。

命题 4 证明（环状结构的图的“仅需用着色种数”的证明）

从图 15 看出，环状结构的图在其面的数量为 3、相邻面的组合力提升到 C_3^2 后，没再提升，一直为大于 C_2^2 小于 C_3^2 之间没有变，其着色种数也一直为 2、3 之间没有变，即其相邻面的组合力最高为 C_3^2，其仅需用着色种数为 3。可见，环状结构的图之所以仅需用 3 色区分，是在于其相邻面的组合力最高为 C_3^2。此证。

面的数量	图的组合模式	三角矩阵	相邻面组合力	着色种数
2	Ⓘ	1	C_2^2	2
3	Ⓘ Ⓘ Ⓘ	1 1 1	C_3^2	3
4	Ⓘ ‖ Ⓘ Ⓘ ‖ Ⓘ	1 -1 1 1 -1 1	$>C_2^2$ $<C_3^2$	2
5	Ⓘ ‖ Ⓘ ‖ ‖ Ⓘ Ⓘ ‖ ‖ Ⓘ	1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1	$>C_2^2$ $<C_3^2$	3
6	略	略	同上	2
7	略	略	同上	3
备注：“Ⓘ”表示相邻点；“‖”表示非相邻点。				

图 15　环状结构的图仅需用着色种数分析图表

命题 5 证明（环抱状结构的图的“仅需用着色种数”的证明）

从图 16 看出，环抱状结构的图在其面的数量为 4、相邻面的组合力提升到 C_4^2 组合后，没再提升，一直为大于 C_3^2 小于 C_4^2 之间没有变。其着色种数也一直为 3、4 之间没有变，即其相邻面的组合力最高为 C_4^2，其仅需用着色种数为 4。可见，环抱状结构的图之所以仅需用 4 色区分，是在于其相邻面的组合力最高为 C_4^2。此证。

综图 12 至图 16 的证明，知：

一字状结构的图的相邻面的组合力最高为 C_2^2，图的仅需用着色种数为 2，即 C_n^2 的 $n=2$，$S=2$，C_n^2 的 $n=S$。

梳子状结构的图的相邻面的组合力最高为 C_3^2，图的仅需用着色种数为 3，即 C_n^2 的 $n=3$，$S=3$，C_n^2 的 $n=S$。

梯子状结构的图的相邻面的组合力最高为 C_4^2，图的仅需用着色种数为 4，即 C_n^2 的 $n=4$，$S=4$，C_n^2 的 $n=S$。

环状结构的图的相邻面的组合力最高为 C_3^2，图的仅需用着色种数为 3，即 C_n^2 的 $n=3$，$S=3$，C_n^2 的 $n=S$。

面的数量	图的组合模式	二角矩阵	相邻面组合力	着色种数
2	Φ	1	C_2^2	2
3	Φ Φ Φ	1 1 1	C_3^2	3
4	Φ ΦΦ ΦΦΦ	1 1 1 1 1 1	C_4^2	4
5	Φ ΦΦ Φ‖Φ ΦΦ‖Φ	1 1 1 1 -1 1 1 1 -1 1	$>C_3^2$ $<C_4^2$	3
6	Φ ΦΦ Φ‖Φ Φ‖‖Φ ΦΦ‖‖Φ	1 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1	$>C_3^2$ $<C_4^2$	4
7	略	略	同上	3
8	略	略	同上	4
备注：“Φ”表示相邻点，“‖”表示非相邻点。				

图 16　环抱状结构的图仅需色数分析图表

环抱状结构的图的相邻面的组合力最高为 C_4^2，图的仅需用着色种数为 4，即 C_n^2 的 $n=4$，$S=4$，C_n^2 的 $n=S$。

依照归纳法，得出结论：当图的相邻面的组合力没有提升并一直保持在这个最高数时，即使图的面的数量在增加，其图的需用着色种数也不会随之提升。图的相邻面的组合力最高数与图的仅需用着色种数两者具有等于关系，同时前者又制约后者，后者不可能大于前者，其定理为：$S \leqslant C_n^2$ 的 n。

依照这一定理推断，一个物体表面的图如需用 5 色区分，其相邻面的组合力必须做到 C_5^2 组合。

图 12 至图 16 证明还告诉我们：一字状结构的图、梳子状结构的图、梯子状结构的图之所以图的仅需用着色种数不同，在于此三种图的相邻面的组合力最高数各不相同；而梳子状结构的图与环状结构的图、梯子状结构的图与环抱状结构的图之所以图的仅需用着色种数相同，是在于图的相邻面的组合力最高数相同。此证。

2. 物体表面的全相邻力与图的相邻面的组合力的极限数

定义 9 物体表面的全相邻力 是指物体表面最多只能做到使“几个面”彼此之间均为相邻的能力。它是制约图的相邻面的组合力的因素。求得此能力的方法是分划法。

定义 10 分划法 是应用图的形成原理，将物体表面作为完整的“面”有意识地一步一步地分划为若干部分（即若干个面），从中求得物体表面的全相邻力的方法。所谓“有意识”，是指要遵循被新分划出来的面尽可能做到与前有的各面都具有相邻关系的原则。当出现有非相邻面时，分划即为终止。

2.1 图的全相邻面的数量与图的相邻面的组合力

图的仅需用着色种数受图的相邻面的组合力最高数的制约。那么，制约图的相邻面的组合力又是什么因素呢？本人的研究结果表明，制约图的相邻面的组合力的因素就是物体表面的全相邻力。

图例序号	图 例	面的数量	图的组合模式	面与面之间相邻情况	相邻面组合力	着色种数
图例1	1 2	2	12	2个面之间相邻	C_2^2	2
图例2	1 2 3	3	12 13 23	3个面之间全相邻	C_3^2	3
图例3	1 2 4 3	4	12 13 23 14 24 34	4个面之间全相邻	C_4^2	4

图 17 图的着色证明分析图表

从图 17 看出，当图例 1 其 2 个面相邻，则其相邻面的组合力为 C_2^2，需用 2 色区分，即全相邻面的数量为 2，则 C_n^2 的 $n=2$，$S=2$。可见，全相邻面的数量与 C_n^2 的 n 与 S 三者是相等关系；

当图例 2 其 3 个面全相邻，则相邻面的组合力为 C_3^2，需 3 色区分，即全相邻面的数量为 3，则 C_n^2 的 $n=3$，$S=3$。可见，全相邻面的数量与 C_n^2 的 n 与 S 三者是相等关系；

当图例 3 其 4 个面全相邻，则相邻面的组合力为 C_4^2，需用 4 色区分，即全相邻面的数量为 4，则 C_n^2 的 $n=4$，$S=4$。可见，全相邻面的数量与 C_n^2 的 n 与 S 三者是相等关系。

依照归纳法，得出结论：图的全相邻面的数量与图的相邻面的组合力与图的着色种数三者具有相等关系。又依照逻辑推断：一个物体表面的图如需用 5 色区分，其相邻面的组合力要做到 C_5^2，则物体表面的全相邻力须做到使“5

个面”全相邻。

那么，平体表面的全相邻力能做到使“几个面”全相邻呢，又其他物体表面的全相邻力及其相邻面的组合力的极限数又是什么样的数呢？请看下文证明。

2.2 平体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

现应用分划法求证平体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数。

先将平体表面作为一个完整的“面”，如图18所示。现应用分划法对这个完整的“面”进行分划，且看图19。

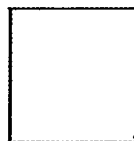


图18

从图19看出，当平体表面被分划为2个面时，2个面相邻，相邻面的组合力为 C_2^2；

当被分划为3个面时，3个面全相邻，相邻面的组合力为 C_3^2；

当被分划为4个面时，4个面全相邻，相邻面的组合力为 C_4^2；

当分划到第四步被分划为5个面时，不能做到5个面全相邻，出现了“3”与“5”两个面非相邻，相邻面的组合力仍为 C_4^2。至此，遵循分划法原则，求证步骤终止。因为，不论你如何变换此5个面之间的相邻关系，都必定存在不相邻的2个面，无法做到使5个面全相邻，图的相邻面的组合力不能做到 C_5^2 组合（见图20）。

分划步骤	图及面的数量	图的组合模式	面与面之间相邻情况	相邻面组合力	着色种数
第一步分划	1 2	⑫	2个面之间相邻	C_2^2	2
第二步分划	1 3 2	⑫ ⑬㉓	3个面之间全相邻	C_3^2	3
第三步分划	1 3 4 2	⑫ ⑬㉓ ⑭㉔㉞	4个面之间全相邻	C_4^2	4
第四步分划	1 3 4 5 2	⑫ ⑬㉓ ⑭㉔㉞ ⑮㉕ 3|5 ㊺	5个面之间不能做到全相邻，出现3与5非相邻	C_4^2	4

图19 求证平体表面的图的全相邻面力步骤图

求证结果：平体表面的全相邻力最多只能做到使“4个面”之间全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2。因此，展现在平体表面的图，不论其面的数量是多少，仅需用4色就足以将其各面区分开。所以，四色猜想命题成立。此证。

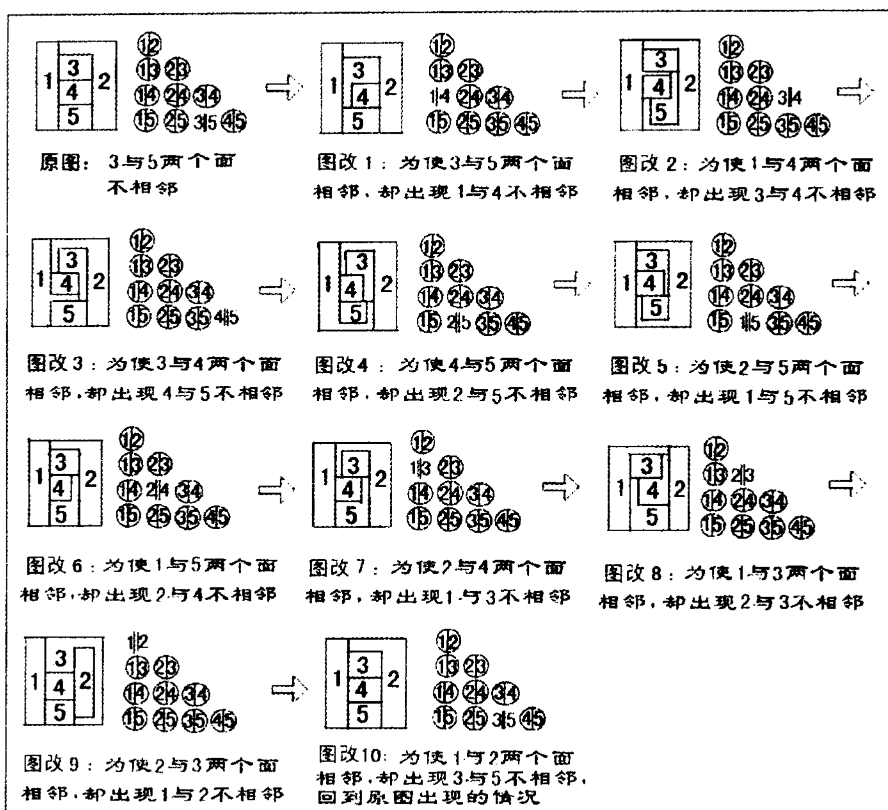


图20　平体表面被分划至第四步、为5个面时面与面之间相邻情况变动图

2.3　环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本文所说的环体，是人们通常说的轮胎体，见图21。

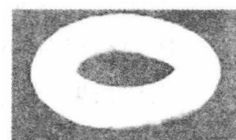


图21

经本人应用分划法对环体表面进行分划（因分划过程作图繁杂，作图略），当分划到第四步被分划为5个面时，可做到5个面全相邻，相邻面的组合力为 C_5^2 组合；当分划到第五步被分划为6个面时，不能做到使6个面全相邻，必定出现不相邻的2个面，图的相邻面的组合力不能做到 C_6^2 组合。

求证结果：环体表面的全相邻力最多只能做到使“5个面”全相邻，其图

的相邻面的组合力的极限数为 C_5^2。因此，展现在环体表面的图，不论其面的数量是多少，仅需用 5 色就足以将其各面区分开。所以，就环体表面的图的着色区分而言，五色猜想命题成立。此证。

2.4 丁环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本人所说的实物丁环体如图 22 所示。

经本人应用分划法对丁环体表面进行分划（因分划过程难以在平体表面作图展现出来，故作图略），分划到第五步被分划为 6 个面时，可做到 6 个面全相邻，图的相邻面的组合力为 C_6^2 组合；但当分划到第六步被分划为 7 个面时，不能做到使 7 个面全相邻，必定出现非相邻面，其图的相邻面的组合力不能做到 C_7^2 组合。

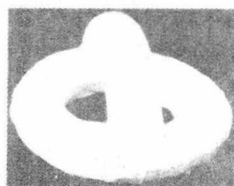


图 22

求证结果：丁环体表面的全相邻力最多只能做到使“6 个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_6^2。因此，展现在丁环体表面的图，不论其面的数量是多少，仅需用 6 色就足以将其各面区分开。所以，就丁环体表面的图的着色区分而言，六色猜想命题成立。此证。

2.5 8 字连环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本人所说的实物 8 字连环体如图 23 所示。

经本人应用分划法对 8 字连环体表面进行分划（因分划过程难以在平体表面作图展现出来，故作图略），分划到第六步被分划为 7 个面时，可做到 7 个面全相邻，图的相邻面的组合力为 C_7^2 组合；但当分划到第七步被分划为 8 个面时，不能做使 8 个面全相邻，必定出现非相邻面，图的相邻面的组合力不能做到 C_8^2 组合。

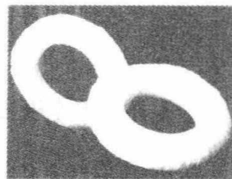


图 23

求证结果：8 字连环体表面的全相邻力最多只能做到使“7 个面”之间全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_7^2。因此，展现在 8 字连环体表面的图，不论其面的数量是多少，仅需用 7 色就足以将其各面区分开。所以，就 8 字连环体表面的图的着色区分而言，七色猜想命题成立。此证。

综图 18 至图 23 的证明，得出结论：展现在不同的物体表面的图，之所以其仅需用着色种数不同，是在于其图的相邻面的组合力的极限数不同。而物体

表面的图的相邻面组合力的极限数不同，又在于物体表面的全相邻力不同。

又，已知

平体表面的全相邻力为“4”，即 $L=4$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2，即 C_n^2 的 $n=4$；图的仅需用着色种数为“4”，即 $S=4$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

环体表面的全相邻力为“5”，即 $L=5$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_5^2，即 C_n^2 的 $n=5$；图的仅需用着色种数为“5”，即 $S=5$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

丁环体表面的全相邻力为“6”，即 $L=6$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_6^2，即 C_n^2 的 $n=6$；图的仅需用着色种数为“6”，即 $S=6$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

8 字连环体表面的全相邻力为“7”，即 $L=7$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_7^2，即 C_n^2 的 $n=7$；图的仅需用着色种数为“7”，即 $S=7$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

依照归纳法，得

物体表面的全相邻力、图的相邻面的组合力的极限数、图的仅需用着色种数三者是等于关系，其定理为：$L=C_n^2$ 的 $n=S$

“$L=C_n^2$ 的 $n=S$”，这个定理就是“为什么展现在不同的物体表面的图其仅需用颜色区分种数也不同”的命题的正确答案。此证。

2010 年 1 月 18 日（完稿）

（本文发表于《科技创新导报》2010 年第 20 期）

图的仅需着色种数与其区分等式和其他问题

——兼对地图四色区分的证明

摘　要　本文续接《图的着色证明与图的着色定理》一文，着重于对“地图以4色区分会不会发生‘爆炸’的问题”和“图的‘仅需着色种数’与其区分等式”进行了证明，证明四色猜想成立。同时，应用“两点连线”的证明方法对事物中的连接现象进行了论证，强调“组合与区分”两者之间关系才是四色猜想命题研究的归结点。此外，指出物体表面的全相邻力是验证物体同胚体的依据，可构造出需用百、万、亿种颜色区分的整体。

关键词　四色猜想　组合　仅需着色种数　面与面之间的组合变化　图的相邻面组合力

在《图的着色证明与图的着色定理》（《科技创新导报》2010年第20期）一文，笔者应用“同中求异、异中求同”的证明方法，求得物体表面的全相邻力（以“L”表示）与图的相邻面组合力（极限数）C_n^2 的 n 与图的仅需着色种数（以“S”表示）三者是相等关系，定理为：$L=C_n^2$ 的 $n=S$。诚然，这个定理只是证明了图的“仅需着色种数”的多少，却并未从数学公式上证明以“仅需着色种数”对图进行区分能否成立，对四色猜想命题的证明只能说是不完整的证明。为此，本文续接该文，对“仅需着色种数”与其区分等式进行证明。此外，就有关四色猜想命题的几个问题，觉得有必要予以说明。

1.　地图以4色区分绝不会发生“爆炸”问题

有学者把四色猜想命题的4色区分之证明比喻为：将地图的所有区域分装“四个盒”内，会不会因出现两个相邻区域同装在一个盒内而发生爆炸（即会

不会出现两个相邻区域同着1色）的问题。对此，笔者的答案是否定的。因为，从实图着色这个角度来说，四色猜想命题之所以能够成立，是因为它是建立在一个客观条件和两个前提的基础上的，否则难以成立。

1.1 四色猜想命题能够成立的一个客观条件

笔者研究发现，由于图的着色方案种数反映出来的是排列数（见图1），而图的面与面之间的组合变化种数反映出来的是组合数，所以，图的着色方案种数远远大于图的面与面之间的组合变化种数。这是四色猜想命题能够成立的一个客观条件。不管人们有没有发现和认可这个客观条件，它都是客观存在的。从图1看出，着色方案种数24正是着色种数4的排列数（4!）得数。

面的编号	由4个面组成、需四色区分的图的24种着色方案																							
①	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
②	2	2	3	3	4	4	1	1	3	3	4	4	1	1	2	2	4	4	1	1	2	2	3	3
③	3	4	2	4	2	3	3	4	1	4	1	3	2	4	1	4	1	2	2	3	1	3	1	2
④	4	3	4	2	3	2	4	3	4	1	3	1	4	2	4	1	2	1	3	2	3	1	2	1

图1 四色区分的24种着色方案

1.2 四色猜想命题能够成立的两个前提

在四色猜想命题提出来不久，数学家斯蒂芬曾设计出一种染色游戏试图证明四色猜想的成立。此游戏由两人（或多人）参加，第一人先画一个闭合区域，由第二人着色；第二人着完色后续画一个区域，由第一人着色……如此循环进行。游戏规定，谁着色完毕并画一区域后，迫使对手定要着第五种颜色时，便判谁为负。其实，经验证，游戏在进行到第六、七步之后，必定要着上第五种颜色。所以，斯蒂芬设计的这个染色游戏是失败的游戏。其失败的原因在于：其一，游戏着色的图是处于变化动态的图；其二，不允许对着色结果作调整、更改。这失败的两个原因又从它的反面告诉我们四色猜想命题能够成立的两个重要前提：

前提一，着色的图必须是已完成、处于静态的图；

前提二，着色过程中必须允许对前面的着色结果进行调整、更改。

事实证明，离开这两个前提，四色猜想不能成立。2005年笔者对一幅展现在正方体表面有108个区域组成的图进行4色区分。在着色过程中，不小于20次的调整、更改。对此，笔者敢说这么一句话：如果不允许对前面的着色结果进行调整、更改，恐怕世界上无一人能完成对这幅图的4色区分。

这两个前提，使我们看到这样的事实：图的面与面之间的组合变化尽管是千变万化，但当着色的图是一个处于静态的图时，这个图只能是千变万化中的1种变化；相反，由于图的着色过程处于可调整、更改的动态之中，因而图的着色方案始终为4！种。以4！种着色方案去应对“1”，完全可将相邻区域区分开，确保四色猜想成立，无须担心将所有区域分装为“四个盒”内会发生爆炸。

以由五个面组成的图为例。笔者研究结果表明，在相邻面组合力为 C_4^2 时，由五个面组成的图的组合结构只有一种，即由3个全相邻面和2个非全相邻面组成。其具体的面与面之间的组合变化共有10种（见图2）。从图2看出，每个图只能反映一种组合变化。此10个组合变化图，其着色种数均为4，即：3个全相邻面分别各着1色，2个非全相邻面同着1色（见图3）。每个组合变化图，其着色方案均有4！种。显然，以“4!”应对“1”，绰绰有余。

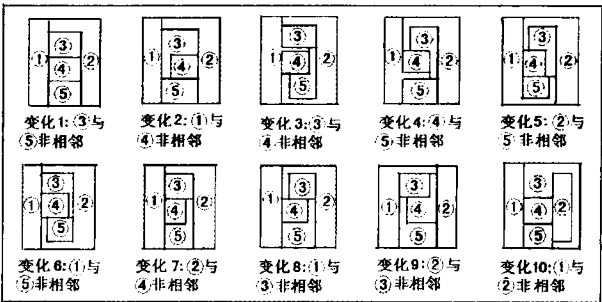


图2　由五个面组成的图的10种组合变化

1.3　图的任何一种面与面之间的组合变化都能顺应于4色区分

前文从着色过程处于动态、着色的图处于静态的角度作出了证明和回答：以动态的4！种着色方案应对1个静态的图，绝对不会出现两个相邻区域同装在一个盒内（同着1色）的情况，因而地图以4色区分不存在发生爆炸的问题。

那么，从图的面与面之间的各种组合变化和图的不变的4色区分这个角度来证明，其结果将是怎样呢？本人的研究结果表明：在图的着色种数为4不变的情况下，图的任何一种面与面之间的组合变化都能顺应于4色区分，同样不会出现两个相邻区域同装在一个盒内（同着1色）的情况，因而不存在发生爆炸的问题。

例证1

以由 5 个面组成的图为例。从图 3 可看出，由 5 个面组成的图的 10 种组合变化（见图 2），均能顺应于 4 色区分。

四种颜色	变化 1	变化 2	变化 3	变化 4	变化 5	变化 6	变化 7	变化 8	变化 9	变化 10
S_1	①	①④	①	①	①	①⑤	①	①③	①	①②
S_2	②	②	②	②	②⑤	②	②④	②	②③	③
S_3	③⑤	③	③④	③	③	③	③	④	④	④
S_4	④	④	⑤	④⑤	④	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤

图 3　由 5 个面组成的图的 10 种组合变化图的 4 色区分

例证 2

图 4 是一个由 8 个面组成的图，其相邻面组合力为 C_4^2，仅需 4 色区分。图的组合结构为由 1 个全相邻面和 7 个非全相邻面组成。据此，此 8 个面的面与面之间的组合可分为若干类。*A* 类：1 个全相邻面须着 1 色，7 个非全相邻面可分为 1 个面单着 1 色，2 个面同着 1 色，4 个面同着 1 色（简称为“1、1、2、4”）；*B* 类：1、1、1、5；*C* 类：1、1、3、3；*D* 类 1、2、2、3；……又各类组合有若干变化（略）。但不论是属于何类组合何种变化，它都能顺应于 4 色区分，见图 5。

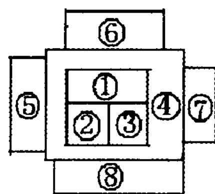


图 4

四种颜色	A类组合若干变化 1	A 2	A 3	A …	B类组合若干变化 1	B 2	B …	C类组合若干变化 1	C 2	C …	D类组合若干变化 1	D 2	D 3	D …	……
S_1	④	④	④		④	④		④	④		④	④	④		
S_2	①	②	②		①	②		①	②		①⑤	①⑦	②⑦		
S_3	②⑤	③⑦	①⑧		②	③		②⑤⑥	③⑦⑧		②⑥	②⑧	③⑤		
S_4	③⑥⑦⑧	①⑤⑥⑧	③⑤⑥⑦		③⑤⑥⑦⑧	①⑤⑥⑦⑧		③⑦⑧	①⑤⑥		③⑦⑧	③⑤⑥	①⑥⑧		

图 5　图 4 的 8 个面各类组合变化的 4 色区分

可见，图的着色种数及着色方案和图的面与面之间的组合变化种数之间的关系是相成相就（或叫“你成我就”）的关系。因此，地图以 4 色区分绝不会发生“爆炸”的问题。

1.4　地图以 4 色区分不存在发生“爆炸”的因素

“$L = C_n^2$ 的 $n = S$”这个定理告诉我们，如要出现两个相邻区域同装在一个盒内（同着 1 色）的现象，唯有在“图的仅需着色种数 $S <$ 图的相邻面组合力 C_n^2 的 n”的情况下才能发生，只要是“图的仅需着色种数 $S =$ 图的相邻面组合力 C_n^2 的 n”，绝对不会出现两个相邻区域同装在一个盒内（同着 1

色）的爆炸问题。按照当今市场经济的话来说，仅需着色种数 S（这个供应量）是按最大的需求量（即 C_n^2 的 n）来供应的，因此，不可能存在供不应求的问题。

就地图四色区分而言，如要出现两个相邻区域同装在一个盒内（同着 1 色）的现象，唯有两个因素：其一，3 色区分；其二，平体表面的全相邻力为 $L=5$（即做到使“5 个面”全相邻)。但事实证明，这两个因素都不存在。因为，第一个因素其本身就违背了四色猜想命题的 4 色区分的要求，至于第二个因素，经应用分划法证明，平体表面的全相邻力为 $L=4$，不可能做到使“5 个面”全相邻。可见，地图以四色区分，不存在“爆炸”的因素，因而不可能发生“爆炸”。

2. 图的仅需着色种数与其区分等式的证明

图的着色种数及着色方案和图的面与面之间的组合变化之间的关系，说到底是图的仅需着色种数与其区分等式是否成立的问题。现予以证明。

2.1 证图的仅需着色种数与其区分等式

设：图的面的数量为 N（$N\geqslant 2$），各色的面的数量则为 n_1、n_2、n_3、n_4……

那么，图的面的数量 = 各色的面的数量相加之和，其公式为

$N=n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots\cdots$

又设：图的着色种数为 S（$S\geqslant 2$），各色分别依序以 S_1、S_2、S_3、S_4……表示。已知各色 S_1、S_2、S_3、S_4……实际上是表示“1”（种颜色)。据此，可把各色的面的数量作为 1 个由若干个面组合的“小整体”，即：S_1 表示为 $C_{n_1}^{n_1}$，S_2 表示为 $C_{n_2}^{n_2}$，S_3 表示为 $C_{n_3}^{n_3}$，S_4 表示为 $C_{n_4}^{n_4}$，其余依此类推。

那么，$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$，$S_4=C_{n_4}^{n_4}$……

据此，得图的仅需着色种数与其区分等式：

$S=S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots$

$S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+\cdots\cdots$

2.2 证各种着色种数不同的图的区分

本人已求得（见《图的着色证明与图的着色定理》）：

一字状结构的图，其相邻面组合力最高为 C_2^2（即 C_n^2 的 $n=2$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 2$），仅需 2 色区分（即 $S=2$）；

环状结构的图和梳子状结构的图，其相邻面组合力最高为 C_3^2（即 C_n^2 的 $n=3$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 3$），仅需 3 色区分（即 $S=3$）；

环抱状结构的图和梯子状结构的图，其相邻面组合力最高为 C_4^2（即 C_n^2 的 $n=4$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 4$），仅需 4 色区分（即 $S=4$）；

平体表面的全相邻力 $L=4$（即最多只能做到使“4 个面”全相邻），图的相邻面组合力最高为 C_4^2（即 C_n^2 的 $n=4$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 4$），仅需 4 色区分（即 $S=4$）；

环体表面的全相邻力 $L=5$（即最多只能做到使“5 个面”全相邻），图的相邻面组合力最高为 C_5^2（即 C_n^2 的 $n=5$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 5$），仅需 5 色区分（即 $S=5$）；

丁环体表面的全相邻力 $L=6$（即最多只能做到使“6 个面”全相邻），图的相邻面组合力最高为 C_6^2（即 C_n^2 的 $n=6$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 6$），仅需 6 色区分（即 $S=6$）；

8 字连环体表面的全相邻力 $L=7$（即最多只能做到使“7 个面”全相邻），图的相邻面组合力最高为 C_7^2（即 C_n^2 的 $n=7$），不论其面的数量 N 是多少（$N \geqslant 7$），仅需 7 色区分（即 $S=7$）。

根据“$L=C_n^2$ 的 $n=S$（含 C_n^2 的 $n=S$）”定理和“$N=n_1+n_2+n_3+n_4+\cdots\cdots$”、“$S=S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots$”、“$S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}$”公式，现对上述各种着色种数不同的图的区分进行逐一证明。

2.2.1 证一字状结构的图的 2 色区分

已知 $C_n^2=C_2^2$　C_n^2 的 $n=2$　$S=2$

那么 $N=n_1+n_2$　$S=S_1+S_2$　　$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}=2$

可见，一字状结构的图的 2 色区分成立。此证。

2.2.2 证环状结构的图和梳子状结构的 3 色区分

已知 $C_n^2=C_3^2$　　C_n^2 的 $n=3$　$S=3$

那么 $N=n_1+n_2+n_3$　　$S=S_1+S_2+S_3$　　$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}=3$

可见，环状结构的图和梳子状结构的图 3 色区分成立。此证。

2.2.3 证环抱状结构的图和梯子状结构的 4 色区分

已知 $C_n^2=C_4^2$　C_n^2 的 $n=4$　$S=4$

那么 $N=n_1+n_2+n_3+n_4$　$S=S_1+S_2+S_3+S_4$

$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$，$S_4=C_{n_4}^{n_4}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}=4$

可见，环抱状结构的图和梯子状结构的 4 色区分成立。此证。

2.2.4 证平体表面的图（即地图）的 4 色区分

已知 $L=4$　$C_n^2=C_4^2$　C_n^2 的 $n=4$　$S=4$

那么 $N=n_1+n_2+n_3+n_4$　$S=S_1+S_2+S_3+S_4$

$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$，$S_4=C_{n_4}^{n_4}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}=4$

可见，平体表面的图的 4 色区分成立，即四色猜想成立。此证。

2.2.5 证环体表面的图的 5 色区分

已知 $L=5$　$C_n^2=C_5^2$　C_n^2 的 $n=5$　$S=5$

那么 $N=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$　$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$，$S_4=C_{n_4}^{n_4}$，$S_5=C_{n_5}^{n_5}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+C_{n_5}^{n_5}=5$

可见，环体表面的图的 5 色区分成立，即五色猜想成立。此证。

2.2.6 证丁环体表面的图的 6 色区分

已知 $L=6$　$C_n^2=C_6^2$　C_n^2 的 $n=6$　$S=6$

那么 $N=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6$　$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$

$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$，$S_4=C_{n_4}^{n_4}$，$S_5=C_{n_5}^{n_5}$，$S_6=C_{n_6}^{n_6}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+C_{n_5}^{n_5}+C_{n_6}^{n_6}=6$

可见，丁环体表面的图的 6 色区分成立，即六色猜想成立。此证。

2.2.7 证 8 字连环体表面的图的 7 色区分

已知 $L=7$　$C_n^2=C_7^2$　C_n^2 的 $n=7$　$S=7$

那么 $N=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7$

$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7$

$S_1=C_{n_1}^{n_1}$，$S_2=C_{n_2}^{n_2}$，$S_3=C_{n_3}^{n_3}$，$S_4=C_{n_4}^{n_4}$，$S_5=C_{n_5}^{n_5}$，$S_6=C_{n_6}^{n_6}$，$S_7=C_{n_7}^{n_7}$

得 $S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+C_{n_5}^{n_5}+C_{n_6}^{n_6}+C_{n_7}^{n_7}=7$

可见，8字连环体表面的图的7色区分成立，即七色猜想成立。此证。

3. 客观事物中的连接现象是连接与组合的关系

定义1　连接体　是指连接形成整体的元素。

定义2　连接线　是用以表示两连接体存在连接关系的一条实线。

定义3　非连接线　是用以表示两连接体不存在连接关系的一条虚线。

定义4　连接组合点　是用以表示两个连接体连接关系的数学符号。即是将两个具有连接关系的连接体的编号数组成一组组合数（如图6中的 1·2 就是表示1与2两个面具有连接关系的连接组合点）。其表达意思与相邻点同。

定义5　非连接组合点　是用以表示两个连接体非连接关系的数学符号。即是将两个不存在连接关系的连接体的编号数组成一组组合数（如图6中 3·5 就是表示3与5两个连接体无连接关系的非连接组合点）。其表达意思与非相邻点同。

定义6　连接线运行规则　是指连接线在始端的连接体向末端的连接体运行过程中必须遵循的法则。这个规则是：连接线与连接线不可交叉通过；非连接线与非连接线可交叉通过；非连接线与连接线可交叉通过。

定义“相邻点”“非相邻点”“图的相邻面的组合力”“物体表面的全相邻力”见《图的着色证明与图的着色定理》。

本人研究结果表明，不论是图的面与面之间的相邻关系，还是客观事物中的连接关系，都是表面现象，而“组合关系”才是它们的本质。

3.1 地图中的区域相邻是连接与组合关系

地图是由若干区域组成的整体，也是由若干连接体组成的整体，而区域是组成地图的连接体；两区域相邻是连接关系，两区域非相邻是非连接关系，用数学数字表达出来，均是 C_2^2 组合；地图的模式是 C_N^2 组合模式。且看图6证明。

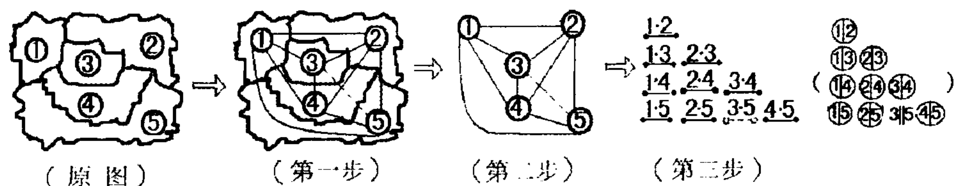


图6　求证地图区域相邻关系及地图模式的证明方法步骤图

图6原图是由5个区域组成的地图，现求证其区域之间相邻关系及模式。

第一步　直接将区域的编号作为点，并根据区域与区域之间的相邻和非相邻情况添画上连接线和非连接线（如第一步图所示）；

第二步　擦去原图的区域边界线，则为区域与区域之间连接关系图（如第二步图所示）；

第三步　将每一条连接线和非连接线两端连接的区域编号以连接组合点和非连接组合点循序表示出来，随之形成 C_N^2 组合模式（如第三步图所示）。

可见，地图的区域与区域之间的相邻关系和非相邻关系是连接关系和非连接关系，均为组合关系；图的结构模式是 C_N^2 组合模式。

在此，要指出的：

1. “两点连线的证明方法”与“边界线添画相邻点的证明方法”（见《科技创新导报》2010年第17期《图的形成原理与图的模式及图的本质》）都是正确的证明方法，都证明了地图区域与区域之间的关系是组合关系，证明了地图的模式是 C_N^2 组合模式。

2. 第二步的“区域与区域之间连接关系图”中的连接线和非连接线数，跟第三步的“图的组合模式”中的连接组合点（相邻点）和非连接组合点（非相邻点）数是相等的，即有多少条连接线就有多少个连接组合点，有多少条非连接线就有多少个非连接组合点，其公式为：

连接线数+非连接线数=连接组合点（相邻点）数+非连接组合点（非相邻点）数 $=C_N^2$

3.2　四通八达的“四通”连接是组合关系

成语“四通八达”中“四通”即是东南西北4个方位相连接的意思。如图7所示，以①、②、③、④四个点分别表示东南西北四个方位，添画上连接线，然后，以连接组合点循序表示出来，随之形成 C_N^2 组合模式。可见，东南

西北4方位连接是组合关系，图的模式为 C_N^2 组合模式。

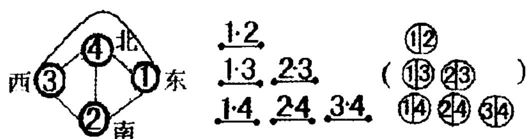


图7　东南西北四通连接及其组合模式

3.3　人们手拉手的连接也是组合关系

手拉手是娱乐游戏中常见的表现形式。其实，人们手拉手的连接也是组合关系。如是人们手拉手一字形排开，用图表示出来就是一字状结构的图，其图的相邻面组合力为 C_2^2，仅需2色区分，如图8所示。

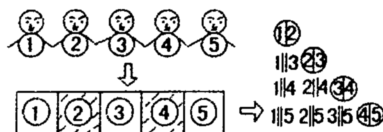


图8

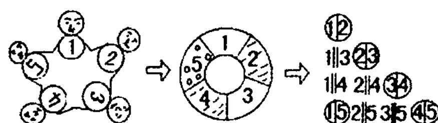


图9

如是人们手拉手围成一个圈，用图表示出来就是环状结构的图，其图的相邻面的组合力为 $>C_2^2$、$<C_3^2$ 之间，仅需3色区分，如图9所示。

综上所证，不难看出，事物中的连接现象都是组合，将其两两连接关系和两两非连接关系用组合数字依序表示出来，就是一个完整的 C_N^2 组合（模式）。

4.　平体表面不能做到五个面（点、线）全连接

4.1　平体表面不能做到五个面全连接

笔者在《图的着色证明与图的着色定理》一文已对“平体表面不能做到五个面全相邻（即全连接）”的问题进行了充分论证，本文不再赘证。

4.2　平体表面不能做到五个点全连接

图10*a*、*b*、*c* 三图是图论中常见的 K_5 图例原图。K_5 图即是五色区分图。

无疑，如按 a、b、c 三图所表达的意思那样，三图中的 10 条线均为连接线，表明 5 个点全连接；由连接组合点和非连接组合点组成的图的组合模式为 $C_N^2 = C_5^2$（见图 11），相邻面组合力为 C_5^2，根据“C_n^2 的 $n=S$（色数）”的原理，需 5 色区分。但事实证明，在遵循连接线运行规则前提下，平体表面不能做到五个点全连接。请看图 12 的证明。

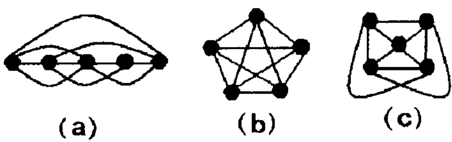


图 10　K_5 图例原图

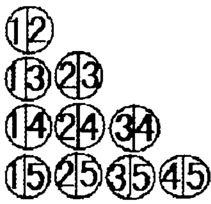


图 11

从图 12 看出，a、b、c 三个图各点置换为面后，必有 2 个面非相邻；添加连接线后，必有一条连接线与另一条连接线交叉，须改为非连接线方能通过（即 10 条线中必有 1 条虚线）。可见，a、b、c 三图均不能做到五个点全连接。因这三个图的相邻面的组合力为 C_4^2，所以仅需 4 色区分。

《图论》中 K_5 图例原图	(a)	(b)	(c)
1、根据原图的意思，将各点置换为面并着上色，难以做到5个面全连接，必定有2个面不连接，同着1色	① ② ③ ④ ⑤	① ⑤ ② ③ ④	① ② ③ ④ ⑤
2、以面的编号为点，添加上连接线和非连接线，然后将各面的边界线擦去	①-②-③-④-⑤	① ② ⑤ ③ ④	① ② ③ ④ ⑤
3、将各条线的连接和非连接情况用连接组合点和非连接组合点表示出来，并形成组合模式	12 13 23 14 24 34 15 25 3‖5 45	12 13 23 14 24 34 15 2‖5 35 45	12 13 23 14 24 34 1‖5 25 35 45
4、图的相邻面的组合力	C_4^2	C_4^2	C_4^2
5、着色种数	4	4	4

图 12　K_5 图例原图的五点连接的证明

在此，笔者觉得有必要提出来的，请大家不妨将图 12 的第二步三图与 K_5 图例原图三图作个比较，两者的同异在什么地方，两者的证明方法哪个更为科学？

4.3　平体表面不能做到五条线全连接

图 13 是一个由五条线组成的图。从该图看出，2 号线与 5 号线不能连接。其实，不论你如何变换此五条线之间的连接，都无法做到使“五条线”全连接。

平体表面不能做到“五个面”、“五个点”“五条线”全连接，这一证明结论印证了平体表面的全相邻力为“$L=4$”的证明结果，也印证了“在色的拓扑作用下，面与点与线具有等价关系，可相互置”的拓扑原理。同时，这一证明结论对于图论中的“两点连线”的证明方法是一个质疑。

图 13

5.　四色猜想命题研究的归结点

已知地图两区域相邻是连接，事物中的连接是组合，而这种组合与四色猜想之区分问题密切相关。这条“相邻与连接”“连接与组合”“组合与区分”之间关系的研究链表明，“组合与区分”两者之间关系是四色猜想命题研究的归结点。这个归结点包含图的“仅需着色种数”这个“仅限数”与“图的相邻面组合力的最高数”（即制约“仅需着色种数”因素的“极限数”）的关系之定理，以及图的“仅需着色种数”与其区分等式如何表达的问题。对此，笔者在《图的着色证明与图的着色定理》一文和本文分别作出了证明和回答，而定理“$L=C_n^2$ 的 $n=S$（含 C_n^2 的 $n=S$）”和公式“$N=n_1+n_1+n_3+n_4+\cdots\cdots$”、“$S=S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots$”、“$S=C_{n_1}^{n_1}+C_{n_2}^{n_2}+C_{n_3}^{n_3}+C_{n_4}^{n_4}+\cdots\cdots$”，就是这个归结点的正确答案。

6. 物体表面的全相邻力是验证同胚体的依据

本人的研究结果表明，应用分划法而求得的物体表面的全相邻力，是验证此物体与彼物体是否属于同胚体的依据。比如，平体、球体、圆柱体、棱体、方体等物体之所以是同胚体，是在于这些物体表面的全相邻力最多只能做到使“4 个面”全相邻。又比如，球体与环体（即轮胎体）之所以不属于同胚体，是在于两者的物体表面的全相邻力不同，球体表面的全相邻力为“$L=4$”，而环体表面的全相邻力为“$L=5$”。同样的道理，环体与丁环体、丁环体与 8 字连环体之所以不属于同胚体，其依据也是在于它们的物体表面的全相邻力不同。

7. 人们可构造出需百、万、亿种颜色区分的整体来

假如抛开物体表面这个制约因素，把连接体之间的连接放在一个无限制的空间进行，那么，可构造出需用百、万、亿种颜色区分的整体（图）来。

现把人作为连接体，把人的一只手拉住对方一只手作为一条连接线，假如 1 个人只有 1 只手，那么，形成了由 2 个人组成的整体，此整体是 C_2^2 的组合，此整体的 2 个人（连接体）需 2 色区分（图略，下同）；

假如 1 个人有 2 只手，那么，形成了由 3 个人组成的整体，此整体是 C_3^2 组合，此整体的 3 个人（连接体）需 3 色区分；

假如 1 个人有 3 只手，那么，形成了由 4 个人组成的整体，此整体是 C_4^2 组合，此整体的 4 个人（连接体）需 4 色区分；

假如 1 个人有 4 只手，那么，形成了由 5 个人组成的整体，此整体是 C_5^2 组合，此整体的 5 个人（连接体）需 5 色区分；

依此类推，假如 1 个人有 99 只手，那么，形成了一个由 100 个人组成的整体，无疑，此整体是 C_{100}^2 组合，需 100 个元素区分；假如 1 个人有 9999 只手，那么，形成了一个由 10000 个人组成的整体，无疑，此整体是 C_{10000}^2 组合，需 10000 个元素区分……可见，人们可构造出需用 n 种颜色区分的整体（图）来。对此，唯有笔者的“组合说”才能作出解答。

2010 年 6 月 18 日（完稿）

（本文发表于《科技创新导报》2010 年第 30 期）

从地图的形成原理看“图论”证明方法的缺陷

——兼对地图仅需着色种数的证明

摘　要　本文以地图的形成原理为切入点，遵循“整体元素循序逐增”这一地图形成的基本原理，求证到地图的结构模式是 C_N^2 组合模式；又从地图的 C_N^2 组合模式中发现了破解四色猜想命题的“金钥匙”；本文还将“整体元素循序逐增”基本原理与“图论”的“两点连线”证明方法进行对接，证明本人的证明结果与正确应用“两点连线”证明方法的证明结果相同，找到了“图论”应用“两点连线”证明方法时存在的“三大缺陷”。

关键词　地图　形成原理　循序逐增　证明方法　仅需色数

笔者在《破解四色猜想命题的切入点在哪里?》一文（见《科技资讯》2009 年第 32 期）中指出：要掌握某项技术，须懂得这项技术的原理；要破解四色猜想命题，须先弄懂地图的形成原理。本人研究结果表明，地图的形成原理乃是破解四色猜想命题的切入点，不只因为它是四色猜想命题的“一道大门”，而且还在于它是找到破解四色猜想命题“金钥匙”的“指路灯”。

1.　地图的形成原理

本文论题所说的图，是指四色猜想命题中的地图。地图的形成原理是什么样的呢？现予以作图证明。

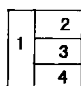


图 1

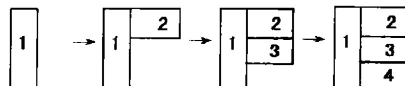
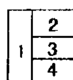


图 2　图 1 的形成过程示意图

如图 1 所示，是一个由 4 个面组合形成的整体。从图 2 可看出，图 1 是由 1 个面→2 个面组

合→3 个面组合→……这样一个"整体元素（即面的数量）循序逐增"的组合形成过程。

但用逆向思维方式去分析，图 1 它又是从一个完整的"面"→分划为 2 个面→分划为 3 个面→……这样一个"整体元素循序逐增"的分划过程（见图 3）。



（原图 1）

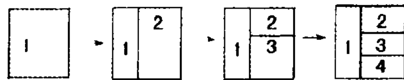


图 3　图 1 的分划过程示意图

可见，地图的形成过程既是整体元素循序逐增的组合形成过程，又是一个整体元素循序逐增的分划过程。这就是地图的形成原理。"整体元素循序逐增"是地图形成的基本原理。遵循这个基本原理，会使我们发现许多有用的东西。

2. 地图的结构模式是组合模式

地图的"整体元素循序逐增"的基本原理告诉我们：地图的面与面之间关系是组合关系，地图的结构模式是 C_N^2 组合模式。

定义 1　相邻面　即彼此之间有共同边界线（即相邻关系）的面。

定义 2　非相邻面　即彼此之间没有共同边界线（即非相邻关系）的面。

定义 3　全相邻面　即与地图中任何一个面均有共同边界线（即均有相邻关系）的面。

定义 4　相邻点　是用以表示两个相邻面关系的一种数学符号。就是在相邻的两个面的共同边界线上画上一个圆圈，并将这两个面的编号分别写在圆圈内组合为一组数字，这个圆圈和圆圈内的共同边界线以及组合数字就称之为相邻点（如图 4 中"⑫"就是表示"1"与"2"两个相邻面关系的相邻点）。

定义 5　非相邻点　是用以表示两个非相邻面关系的一种数学符号。就是将非相邻的两个面的编号分别写在两条竖线（这两条竖线是表示非相邻的意思）的两侧边，并组合为一组数字，这两条竖线和组合数字称之为非相邻点（如图 4 中"2‖4"就是表示"2"与"4"两个非相面的非相邻点）。

定义 6　地图　是被划分为若干个面（即区域）的组合整体。其结构模式是 C_N^2 组合模式。

定义 7　地图的结构模式　是用以有序、准确记录地图的各面彼此之间相邻关系和非相邻关系情况的一种数学建模。地图的结构模式由相邻点组成或由相邻点和非相邻点共同组成。因模式中各个相邻点和非相邻点的组合数字与 C_N^2 组合模式数字相一致，因此，地图的结构模式就是 C_N^2 组合模式（称为“大组合”）。它是检验此地图与彼地图的内部联系是否相同的标准。

地图的面与面之间关系究竟是排列关系还是组合关系呢？地图的结构模式是排列模式还是组合模式呢？对此，遵循地图的“整体元素循序逐增”的基本原理，就可找到正确的答案。现以图 1 为例进行证明。

第一步　循着图 1 的循序逐增组合过程将图的面添加上相邻点。

第二步　循着图 1 的组合过程有序列出相邻点和非相邻点，并自然形成图的模式。

或是

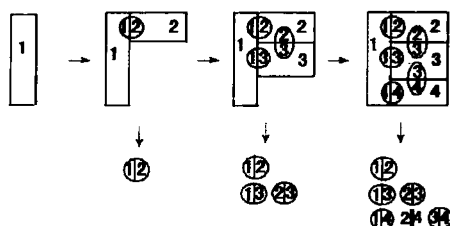


图 4　面与面之间关系的证明方法图之一

第一步　循着图 1 的循序逐增分划过程将图的面添加上相邻点。

第二步　循着图 1 的分划过程有序列出相邻点和非相邻点，并自然形成图的模式。

以上求证方法，可直接将相邻点组合数字和非相邻点组合数字对号入座到图的 C_N^2 组合模式中去。

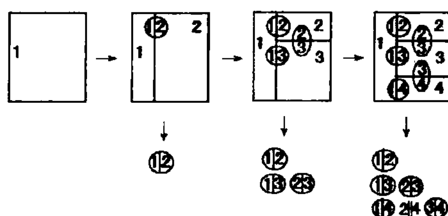


图 5　面与面之间关系的证明方法图之二

从图 4、图 5 可知：

当图的面的数量（简称为“面数”）为 1 个时，不存在组合，不存在相邻点；

当图的面数为 2 个时，图的模式仅有 1 个相邻点，相邻点的组合数字“12”正是“1”与“2”两个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合数字，即为 C_2^2 组合，其组合等式为 $C_2^2=\frac{2\times1}{2\times1}=1$；

当图的面数为 3 个时，图的模式共有 3 个相邻点，相邻点的组合数字“12，13，23”，正是“1”“2”“3” 3 个面的编号数字为不同元素取出 2 个元素并成一组的组合数字，即为 C_3^2 组合，其组合等式为 $C_3^2=\frac{3\times2}{2\times1}=3$；

当图的面数为4个时，图的模式共有5个相邻点和1个非相邻点，相邻点的组合数字和非相邻点的组合数字“12，13，23，14，24，34”，正是“1”、“2”、“3”、“4”4个面的编号数字为不同元素取出2个元素并成一组的组合数字，即为C_4^2组合，其组合等式为$C_4^2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$。

由此得出结论：地图的面与面之间关系是组合关系，不是排列关系，两个相邻面的关系是组合关系，两个非相邻面的关系也是组合关系；地图的结构模式是C_N^2组合模式，绝不是排列模式。据此，地图的定义为：所谓地图，是被划分为若干个面（即区域）的组合整体，它的结构模式是C_N^2组合模式。

综上证明，根据数学的组合原理，地图的组合模式的关系等式可表示为

$C_N^2=\frac{N\times(N-1)}{2\times1}$　（式中的“N”表示图的面数）

据此，地图的组合模式与相邻点点数、非相邻点点数的关系等式可表示为

$C_N^2=y+z$

（式中y表示相邻点点数，z表示非相邻点点数，当$z=0$，则$C_N^2=y$）

3. 地图仅需色数与组合力的关系

地图的组合模式告诉我们：地图的仅需色数与地图的相邻面的组合力有着密切联系。

定义8　图的相邻面的组合力　是指图中相邻面之间形成的组合能力，它是以有几个相邻面彼此之间均具有组合关系为衡量标准。以C_n^2表示（称为“小组合”）。

本人的研究结果表明，图的相邻面的组合力与图的色数（以色字汉语拼音的第一个字母“S”表示）具有相等关系。

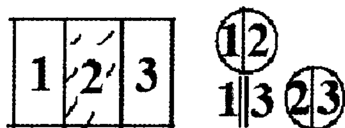


图6及其组合模式

例证1

如图6所示，面数3个，图的相邻面的组合力为C_2^2，图的色数为2。现将图3增加1个面，如图7所示。从图7看出，面数4个，但图的相邻面的组合力没因面数增加而提升，仍为C_2^2，图的色数仍为2。可见，面数对图的色数不起决定性作用。

例证 2

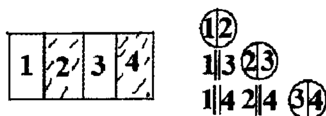


图 7 及其组合模式

现将图 6 的 3 个面的相邻情况作改动，使原来不相邻的“1”与“3”两个面相邻，如图 8 所示。从图 8 看出，面数 3 个没变，但图的相邻面的组合力由 C_2^2 提升为 C_3^2，图的色数也随之由 2 上升为 3。可见，图的相邻面的组合力对图的色数起着决定性作用。

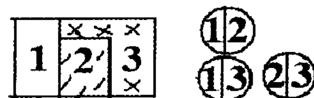


图 8 及其组合模式

例证 3

现将图 7 的 4 个面的相邻情况作改动，使其 4 个面彼此之间均相邻，如图 9 所示。从图 9 看出，面数 4 个没变，但图的相邻面的组合力由 C_2^2 提升为 C_4^2，图的色数也随之由 2 上升为 4。可见，图的相邻面的组合力对图的色数起着决定性作用。

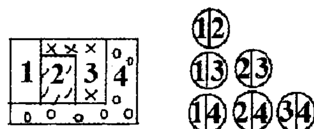


图 9 及其组合模式

综图 6 至图 9 的证明，得出结论：图的相邻面的组合力与图的色数有着密切联系，前者对后者起着决定性作用，后者的增加有赖于前者的提升。

又，已知

图 6 和图 7 两个图的相邻面的组合力为 C_2^2，C_n^2 的 $n=2$，图的色数为 $S=2$，可见，C_n^2 的 $n=S$；

图 8 的相邻面的组合力为 C_3^2，C_n^2 的 $n=3$，图的色数为 $S=3$，可见，C_n^2 的 $n=S$；

图 9 的相邻面的组合力为 C_4^2，C_n^2 的 $n=4$，图的色数为 $S=4$，可见，C_n^2 的 $n=S$。

依照归纳法，得

图的相邻面的组合力与图的色数有着相等关系，定理为：C_n^2 的 $n=S$

4. 物体表面的全相邻力与图的相邻面的组合力的极限数

定义 9　物体表面的全相邻力　是指物体表面最多只能做到使“几个面”彼此之间均为相邻的能力（以力字汉语拼音的第一个字母“L”来表示）。它是制约图的相邻面的组合力的因素。求得此能力的方法是分划法。

定义 10　分划法　是应用图的形成原理，将物体表面作为完整的“面”

有意识地一步一步地分划为若干个面，从中求得物体表面的全相邻力的方法。所谓“有意识”，是指要遵循被新分划出来的面尽可能做到与前有的各面都具有相邻关系的原则。当出现有非相邻面时，分划即为终止。

4.1 图的全相邻面的数量与图的相邻面的组合力

图的需用色数受图的相邻面的组合力制约，而图的相邻面的组合力则受物体表面的全相邻力制约。

图例序号	图例	面数	图的组合模式	面与面之间相邻情况	相邻面组合力	色数
图例1	1 2	2	(1|2)	2个面之间相邻	C_2^2	2
图例2	1 2 3	3	(1|2) (1|3) (2|3)	3个面之间全相邻	C_3^2	3
图例3	1 2 4 3	4	(1|2) (1|3) (2|3) (1|4) (2|4) (3|4)	4个面之间全相邻	C_4^2	4

图 10　图的着色证明分析图表

从图10看出，当图例1其2个面相邻，则其相邻面的组合力为 C_2^2，需 2 色区分，即全相邻面的数量为2，则 C_n^2 的 $n=2$，$S=2$。可见，全相邻面的数量与 C_n^2 的 n 与 S 三者是等于关系；

当图例 2 其 3 个面全相邻，则相邻面的组合力为 C_3^2，需 3 色区分，即全相邻面的数量为3，则 C_n^2 的 $n=3$，$S=3$。可见，全相邻面的数量与 C_n^2 的 n 与 S 三者是等于关系；

当图例 3 其 4 个面全相邻，则相邻面的组合力为 C_4^2，需 4 色区分，即全相邻面的数量为4，则 C_n^2 的 $n=4$，$S=4$。可见，全相邻面的数量与 C_n^2 的 n 与 S 三者是等于关系。

依照归纳法，得出结论：图的全相邻面的数量与图的相邻面的组合力与图的色数三者具有等于关系。又依照逻辑推断：一个物体表面的图如需 5 色区分，其相邻面的组合力要做到 C_5^2，则物体表面的全相邻力须做到使“5 个面”全相邻。

那么，平体表面的全相邻力能做到使“几个面”全相邻呢？请看下文证明。

4.2 平体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

现应用分划法求证平体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数。

先将平体表面作为一个完整的“面”，如图 11 所示。现应用分划法对这个完整的“面”进行分划，见图 12。

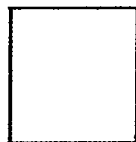


图 11

从图12看出，当平体表面被分划为2个面时，2个面相邻，相邻面的组合力为 C_2^2；

当被分划为3个面时，3个面全相邻，相邻面的组合力为 C_3^2；

当被分划为4个面时，4个面全相邻，相邻面的组合力为 C_4^2；

当分划到第四步被分划为5个面时，不能做到5个面全相邻，出现了“3”与“5”两个面非相邻，相邻面的组合力仍为 C_4^2。至此，遵循分划法原则，分划求证终止。因为，不论你如何变换此5个面之间的相邻关系，都必定存在不相邻的2个面，无法做到使5个面全相邻，图的相邻面的组合力不能做到 C_5^2 组合。

分划步骤	图及面的数量	图的组合模式	面与面之间相邻情况	相邻面组合力	色数
第一步分划	1 2	12	2个面之间相邻	C_2^2	2
第二步分划	1 3 2	12 13 23	3个面之间全相邻	C_3^2	3
第三步分划	1 3 4 2	12 13 23 14 24 34	4个面之间全相邻	C_4^2	4
第四步分划	1 3 4 5 2	12 13 23 14 24 34 15 25 35 45	5个面之间不能做到全相邻，出现3与5非相邻	C_4^2	4

图 12　平体表面的全相邻力的分划求证图

求证结果：平体表面的全相邻力最多只能做到使“4个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2。因此，平体表面的图，不论其面数是多少，仅需4色就足以将其各面区分开。所以，四色猜想命题成立。此证。

4.3　球体、正方体、圆柱体、锥体、钻石体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

球体、正方体、圆柱体、锥体、钻石体是人们熟悉的物体。经本人应用分划法对这些物体表面进行分划（因分划过程作图繁杂，作图略），当分划到第三步被分划为4个面时，可做到4个面全相邻，相邻面的组合力为 C_4^2；当分划到第四步被分划为5个面时，与平体表面一样，不能做到使5个面全相邻，必定出现不相邻的2个面，图的相邻面的组合力不能做到组 C_5^2 合。

求证结果：球体、正方体、圆柱体、锥体、钻石体表面的全相邻力最多只能做到使“4个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2。因此，这些物体表面的图，不论其面数是多少，仅需4色就足以将其各面区分开。所以，就球体、正方体、圆柱体、锥体、钻石体表面的图的着色区分而言，四色猜想命题成立。此证。

4.4 环体（即轮胎体）、石锁体、方框体等物体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

环体（见图13）、石锁体、方框体也是人们熟悉的物体。经本人应用分划法对此三种物体表面进行分划（因分划过程作图繁杂，作图略），当分划到第四步被分划为5个面时，可做到5个面全相邻，相邻面的组合力为 C_5^2；当分划到第五步被分划为6个面时，不能做到使6个面全相邻，必定出现不相邻的2个面，图的相邻面的组合力不能做到 C_6^2 组合。

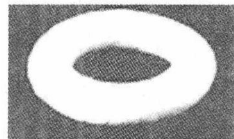


图13

求证结果：环体、石锁体、方框体表面的全相邻力最多只能做到使“5个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_5^2。因此，环体、石锁体、方框体表面的图，不论其面数是多少，仅需5色就足以将其各面区分开。所以，就环体、石锁体、方框体表面的图的着色区分而言，五色猜想命题成立。此证。

4.5 丁环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本人所说的实物丁环体如图14所示。经本人应用分划法对丁环体表面进行分划（因分划过程难以在平体表面作图展现出来，故作图略），分划到第五步被分划为6个面时，可做到6个面全相邻，图的相邻面的组合力为 C_6^2；但当分划到第六步被分划为7个面时，不能做到使7个面全相邻，必定出现非相邻面，其图的相邻面的组合力不能做到 C_7^2 组合。

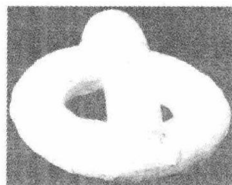


图14

求证结果：丁环体表面的全相邻力最多只能做到使“6个面”全相邻，其图的相邻面的组合力的极限数为 C_6^2。因此，丁环体表面的图，不论其面数是多少，仅需6色就足以将其各面区分开。所以，就丁环体表面的图的着色区分而言，六色猜想命题成立。此证。

4.6 8字连环体表面的全相邻力及图的相邻面的组合力的极限数

本人所说的实物8字连环体如图15所示。经本人应用分划法对8字连环体表面进行分划（因分划过程难以在平体表面作图展现出来，故作图略），分划到第六步被分划为7个面时，可做到7个面全相邻，图的相邻面的组合力为

C_7^2；但当分划到第七步被分划为8个面时，不能做到使8个面全相邻，必定出现非相邻面，图的相邻面的组合力不能做到 C_8^2 组合。

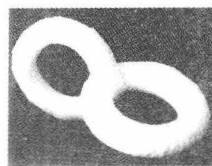


图15

求证结果：8字连环体表面的全相邻力最多只能做到使“7个面”之间全相邻；其图的相邻面的组合力的极限数为 C_7^2。因此，8字连环体表面的图，不论其面数是多少，仅需7色就足以将其各面区分开。所以，就8字连环体表面的图的着色区分而言，七色猜想命题成立。此证。

综上证明，得出结论：平体与球体、正方体、圆柱体、锥体、钻石体，环体与石锁体、方框体，之所以其图的仅需色数相同，是在于其图的相邻面的组合力的极限数相同；而物体表面的图的相邻面组合力的极限数相同，又在于物体表面的全相邻力相同。平体、环体、丁环体、8字连环体，之所以其仅需色数不同，是在于其图的相邻面的组合力的极限数不同；而物体表面的图的相邻面组合力的极限数不同，又在于物体表面的全相邻力不同。

又，已知

平体、球体、正方体、圆柱体、锥体、钻石体表面的全相邻力为 $L=4$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2，C_n^2 的 $n=4$；图的仅需色数为 $S=4$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

环体、石锁体、方框体表面的全相邻力为 $L=5$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_5^2，C_n^2 的 $n=5$；图的仅需色数为 $S=5$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

丁环体表面的全相邻力为 $L=6$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_6^2，C_n^2 的 $n=6$；图的仅需色数为 $S=6$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

8字体表面的全相邻力为 $L=7$；图的相邻面的组合力的极限数为 C_7^2，C_n^2 的 $n=7$；图的仅需色数为 $S=7$。可见，$L=C_n^2$ 的 $n=S$。

依照归纳法，得

物体表面的全相邻力、图的相邻面的组合力的极限数、图的仅需色数三者是等于关系，其定理为：$L=C_n^2$ 的 $n=S$

“$L=C_n^2$ 的 $n=S$”，这个定理就是求证“物体表面的图其仅需色数”的定理。它对于“为什么不同的物体表面的图其仅需色数有的相同，有的不相同”的着色现象作出了正确的回答，是四色猜想命题的正确答案。此证。

5. “图论”的缺陷

地图的“整体元素循序逐增”的基本原理告诉我们：“图论”应用“两点连线”证明方法时存在三大缺陷。

所谓“图论”的“两点连线”证明方法，是在欧拉创建的证明“七桥”问题的方法上，应用拓扑原理，将连接体（即面）置换为“点”（也称为顶点），并在两“点”之间添画上一条连线（也称为边），以此证明四色区分的方法。是当今数学界认可和“图论”教科书通用的证明方法。

就证明四色猜想命题而言，本人的证明方法及证明结果与“图论”的证明方法及证明结果完全不同。这当中，是本人的证明方法有错，还是“两点连线”证明方法有错，抑或是“图论”应用“两点连线”证明方法时有错？对此，现将地图的“整体元素循序逐增”的基本原理与“图论”的“两点连线”证明方法进行对接，答案自有分晓。

“图论”缺陷1　漏缺了将“连线两端数字以组合数字记录下来”这道程序

图16是“图论”教科书中的一个例图。现将该图的点转换为有编号的点（见图17），遵循地图的“整体元素循序逐增”的基本原理，将每条连线两端数字以组合数字记录下来，随之形成图的组合模式（见图18）。

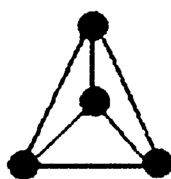


图16

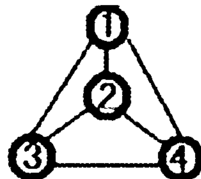


图17

从图18看出，图16的结构模式为C_4^2组合模式。可见，“两点连线”的图，其图的结构模式同样是C_N^2组合模式。

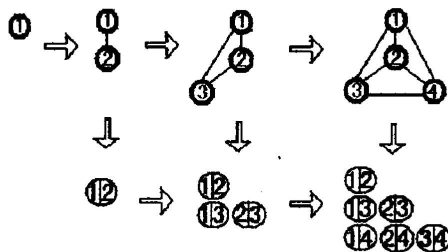


图18　图16的形成过程及图的组合模式

由此得出结论，“两点连线”证明方法与本人的证明方法，两者证明结果相同：地图的结构模式是C_N^2组合模式。

同时证明，“两点连线”证明方法本身没有错，错是错在“图论”在应用“两点连线”证明方法时，没有遵循地图的“整体元素循序逐增”的基本原理，在将地图置换为“两点连线”的图后，漏缺了将“连接线两端数字和非连接线两端数字以组合数字记录下来”这道程序，而直接进入证明色数程序。因此，“图论”应用“两点连线”证明方法对地图着色种数的证明，实际上是应用拓扑原理，将地图置换为一种新的现象来证明原来的现象，完全没有切入地图的本质——地图的 C_N^2 组合模式。这便是“图论”应用“两点连线”证明方法时存在的缺陷之一。

“图论”缺陷 2　图的连线只表达“两两相邻”关系，不表达“两两非相邻”关系

如图 19、图 20，是“图论”教科书中有关“着色理论”的两个例图。图 19 是图 20“加上新边 v_4v_6，v_3v_5，v_5v_7 得到的图”，该书以此证明并得结论：“添加上新边只能色数不减，甚至变大。”

图 21 是根据本人的“组合说”理论将图 19、图 20 完整表达后的图表。



图 19　　图 20

从图 19、图 20 与图 21 的比较中可知，同样是应用“两点连线”证明方法，“图论”对“添加上新边只能色数不减，甚至变大”的结果未能说出其“所以然”，而本人的“组合说”理论对此结果能说出其“所以然”：图 19“添加上新边”后，虽是相邻点（即边）增加了，但其图的相邻面的组合力并没有升降，仍为 C_4^2，故色数仍为 4。

图例	图 20	图 19
将原图的顶置换为有编号的点，将非连接的两点之间添加上虚线		
由连接点和非连接点组成的图的组合模式	(1|2) (1|3) (2|3) (1|4) (2|4) (3|4) 1‖5 2‖5 3‖5 (4|5) 1‖6 2‖6 3‖6 4‖6 (5|6) 1‖7 (2|7) (3|7) (4|7) 5‖7 (6|7)	(1|2) (1|3) (2|3) (1|4) (2|4) (3|4) 1‖5 2‖5 (3|5) (4|5) 1‖6 2‖6 3‖6 (4|6) (5|6) 1‖7 (2|7) (3|7) (4|7) (5|7) (6|7)
图的相邻面的组合力	C_4^2	C_4^2
需用色数	4	4

图 21　图 19、图 20 完整表达证明图

显然，“图论”对“添加上新边只能色数不减，甚至变大”的结果未能说出其“所以然”，这不是“两点连线”证明方法的错，而是在于“图论”将地图用“两点连线”的图表达时，只表达“两两相邻”关系，不表达“两两非相邻”关系，是不完整的表达。即是说，“图论”应用“两点连线”证明方法表达的地图，

乃是漏缺了“两两非相邻”这一半的“半个地图”。因此，“图论”不可能发现地图的整体结构是 C_N^2 组合模式，更不可能切入地图的 C_N^2 组合模式，从中发现“图的相邻面的组合力”与“图的色数”两者的关系。此是“图论”应用“两点连线”证明方法时存在的缺陷之二。

“图论”缺陷 3　图的连线运行只讲随意性，没有遵循“连线运行规则”

图 22 是 K_5 图，即是五色区分图。无疑，如按图 22 所表达的那样，图中的 10 条连线均为连接线，表明 5 个点全连接，需 5 色区分。然而，如果 K_5 图作为平面图来表达（即是展现在平体表面的图），它是不可能实现的图（地图）。因为，本人的研究结果表明：平体表面的图不能做到 5 个点（亦即 5 个面）全连接。据此，本人定了个“连线运行规则”：连接线与连接线不可交叉通过；非连接线与非连接线可交叉通过；非连接线与连接线可交叉通过。事实证明，这一规则是必须遵循的规则，只有遵循这一规则，“两点连线”证明方法的完整性和准确性才能得之于体现。

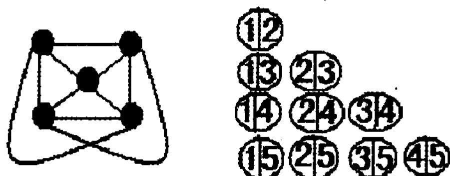


图 22 及其组合模式

图 23 是平体表面不能做到 5 个点全连接的证明图。图中的实线是表示连接线，虚线是表示非连接线。因①与⑤两个点非连接，故图中 5 个点不能做到全连接，图的相邻面的组合力为 C_4^2，仅需 4 色区分。

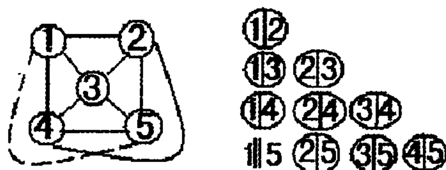


图 23 及其组合模式

图 22、图 23 两个图同为由 5 个点 10 条连线组成，所不同的，图 22 的 10 条连线均为连接线（即实线），图 23 的 10 条连线为 9 条连接线（即实线）、1 条非连接线（即虚线）。这“1 条虚线”之差，就是平体表面不能做到 5 个点全连接的标志，是本人的“组合说”证明方法与“图论”应用“两点连线”证明方法的本质区别。

图 22 与图 23 两个图的比较证明告诉我们，“图论”应用“两点连线”证明方法的缺陷之三，就在于表达地图的面与面之间的关系时，连线运行只讲随意性，没有遵循“连线运行规则”。

6. 地图的 C_N^2 组合模式与“1”的三角矩阵

根据地图的 C_N^2 组合模式中每个相邻点和非相邻点均为 C_2^2 组合和“$C_2^2=1$”的原理，将相邻点和非相邻点分别转换为“1”“-1”来表示，就可看出，图的 C_N^2 组合模式实质上是由“1”和“-1”组成的三角矩阵（如图24）。

这个由“1”和“-1”组成的三角矩阵表达了三层意思：

其一 三角矩阵中的“1”和“-1”所处的位置，既表达了地图中哪两个面是相邻关系抑或是非相邻关系，同样也表达了“两点连线”图中的哪条连线连接两端的点（即顶）是哪两个点是连接关系抑或是非连接关系。

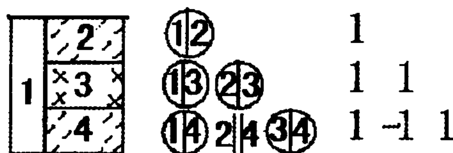


图24 （图1及其组合模式和三角矩阵）

其二 三角矩阵中的“1”和“-1”是数量的表达：“1”，既是1个相邻点的“1”，又是1条连接线的“1”；“-1”，既是1个非相邻点的“1”，又是1条非连接线的“1”。即是说，地图的 C_N^2 组合模式的相邻点和非相邻点点数等于“两点连线”图中的连线条数，相邻点点数等于连接线条数，非相邻点点数等于非连接线条数。其公式为：

C_N^2 = 相邻点点数 + 非相邻点点数 = 连接线条数 + 非连接线条数

其三 平体表面的图，不论其面数是多少，其组合模式中的相邻点点数除以面数不可能大于3，即“（C_N^2 - 非相邻点点数）÷ $N \leq 3$”；同样，“两点连线”的图，在遵循“连线运行规则”的前提下，不论其点（即顶）数是多少，其连接线条数除以点数不可能大于3，即“（C_N^2 - 非连接线条数）÷ $N \leq 3$”。

这个“≤3”告诉我们这样的事实：展现在平体表面的图，其任何一个面都有可能做到与图中所有面相邻（即成为“全相邻面”），但与此“全相邻面”相邻的若干面中，不可能做到“4个面”彼此之间相邻，至多存在“3个面”彼此之间相邻，即“1（全相邻面）+（≤3）≤4”。同样，“两点连线”的图，在遵循“连线运行规则”的前提下，其任何一个点都有可能做到与图中所有点连接，但与此点连接的若干点中，不可能存在“4个点”彼此之间连接，至多存在“3个点”彼此之间连接，即“1（全连接点）+（≤3）≤4”。

以前文图19为例，“4”与“1、2、3、5、6、7”六个点均连接，但“1、2、3、5、6、7”6个点中不存在“4个点”彼此之间连接，至多存在“3个

点”彼此之间连接。据此，“4”独着1色，“1、2、3、5、6、7”6个点仅需3色。所以，图19仅需4色区分。其实，在遵循“连线运行规则”的前提下，不论你对图20如何添“边”加“点”，都可断定：（1）其连接线条数除以点数不可能大于3；（2）其图的相邻面的组合力为 C_4^2 不会变；（3）仅需4色区分。

总之，本人“组合说”的证明方法的证明结果与正确应用“两点连线”证明方法的证明结果完全一致。

2010年8月18日（完稿）

（发表于《数学学习与研究》2011年第5期）

验证“图的仅需色数定理”的证明方法

——着重于对平（球）体表面的图的仅需色数验证

摘　要　本文续接《从地图的形成原理看图论证明方法的缺陷》一文，对现实中如何验证“图的仅需色数定理（即‘$L=C_n^2$ 的 $n=S$’）”的正确性，提出了正确的证明方法，着重于对平（球）体表面的图的仅需色数（即四色猜想）进行了验证证明。将四色猜想命题设定为 C_N^5 组合模式并作为被验证体，以现实中地图的 C_N^2 组合模式为验证依据。证明结果表明，C_N^5 组合模式中每一个组合的 5 个元素（即面）至少存在 1 对不相邻的 2 个面，均仅需≤4 色区分，从而证明四色猜想成立。

关键词　四色猜想　地图　C_N^5 组合模式　C_N^2 组合模式　组合原理　仅需色数　验证

在《从地图的形成原理看图论证明方法的缺陷》一文（见《数学的学习与研究》2011 年第 5 期）中，笔者根据“物体表面的全相邻力（以 L 表示）”与“图的相邻面的组合力的极限数（以 C_n^2 表示）”与“图的仅需色数（以 S 表示）”三者的关系，求得“图的仅需色数定理：$L=C_n^2$ 的 $n=S$”，得出答案：“四色猜想命题之所以成立，是在于平（球）体表面的全相邻力最多只能做到使‘4 个面’全相邻（即 $L=4$），其图的相邻面的组合力的极限数为 C_4^2（即 C_n^2 的 $n=4$）。”那么，以现实的图来说，如何验证“图的仅需色数定理”的正确性呢？为此，本文就这一问题作出解答，并着重于对平（球）体表面的图的仅需色数（即四色猜想）进行验证证明。

1. 验证“图的仅需色数定理”的证明方法

定义 分划法、图的组合模式、物体表面的全相邻力、图的相邻面的组合力详见《从地图的形成原理看图论证明方法的缺陷》（以下简称“《缺陷》”）一文。

在《缺陷》一文中讲到，物体表面的全相邻力是应用分划法对物体表面进行有意识的分划而求得的。验证“图的仅需色数定理”的证明方法，就是根据分划法求得的结果，应用数学的组合原理，将图的仅需色数命题（即 n 色猜想命题）设定为 C_N^m 组合模式（即在应用分划法的前提下，以该物体表面被分划为几个面时出现“不相邻的两个面”的“几”为 m，将该物体表面的图“仅需着色种数”命题设定为 C_N^m 组合模式），并作为被验证体，以现实中的图的 C_N^2 组合模式不相邻的 2 个元素（即面）为验证依据，对命题的 C_N^m 组合模式中每一个组合进行验证。如 C_N^m 组合模式中每一个组合的 m 个元素（即面）都存在不相邻的 2 个（或 2 个以上）元素，那么表明每一个组合的 m 个元素均有 2 个（或 2 个以上）元素可着同 1 色，那么“$m-2-1\leqslant n$”，每一个组合的 m 个元素均仅需 $\leqslant n$ 色区分，从而证明 n 色区分成立；如 C_N^m 组合模式中有一个（或多个）组合不存在不相邻的面，那么表明此个组合需 m 色区分，因 $m>n$，从而证明 n 色区分不成立。

现对平（球）体表面的图的仅需色数（即四色猜想）进行验证证明。

2. 验证平（球）体表面的图的仅需色数

第一步 将四色猜想命题设定为 C_N^5 组合模式并作为被验证体

笔者在《缺陷》一文应用分划法求证到平（球）体表面当被分划到第四步、被分划为 5 个面时，不能做到使 5 个面全相邻，必定出现不相邻的 2 个面。这个证明结果清楚地告诉我们，展现在平（球）体表面的地图中的任何“5 个面”都不能做到彼此之间均相邻，必定存在不相邻的 2 个面。又我们知道，对四色猜想命题的证明，实际上是对平（球）体表面的面的数量（以“N”表示）为 5 个以上（即 $N\geqslant 5$）的图作出证明。根据这些已知条件，可将四色猜想命题（即平、球体表面的图的仅需色数）设定为一个从 N 个元素中

任意取出 5 个元素为一个组合的整体，即为 C_N^5 组合模式，见图 1。

毫无疑问，在这个 C_N^5 组合模式中，相对于由 N 个元素（即面）组成的图来说，不论其面与面之间的关系如何，其任意取出 5 个元素的组合则是穷举的。如由 5 个面组成的图，仅有“12345”一个组合；由 6 个面组成的图，共有“12345，12346，12356，12456，13456，23456”6 个组合；由 7 个面组成的图共有 21 个组合（详见图 1）。我们把这个 C_N^5 组合模式作为被验证体，以现实中的图的 C_N^2 组合模式为验证依据，对四色猜想能否成立进行证明。

N	C_N^5 组合模式中的各组组合	C_N^5
5	12345	$C_5^5=1$
6	12346 12356 12456 13456 23456	$C_6^5=6$
7	12347 12357 12457 13457 23457 12367 12467 13467 23467 12567 13567 23567 14567 24567 34567	$C_7^5=21$
8	12348（余略）	$C_8^5=56$
9	12349（余略）	$C_9^5=126$
…	……	……

图 1

第二步　以现实中的图的 C_N^2 组合模式为验证依据

笔者在《缺陷》一文求证到，地图的结构模式是 C_N^2 组合模式。这个 C_N^2 组合模式，准确、真实地记录了地图的各面彼此之间相邻关系和非相邻关系情况。为此，将现实中的图的面与面之间的关系以 C_N^2 组合模式表达出来（如图 2），并以此为依据，对图的 C_N^5 组合模式中每一个组合进行验证。如图的 C_N^5 组合模式中每一个组合的 5 个元素（即面）都存在不相邻的 2 个（或 2 个以上）元素，那么表明每一个组合的 5 个元素均有 2 个（或 2 个以上）元素可着同 1 色，均仅需≤4 色区分，从而证明 4 色区分成立；如图的 C_N^5 组合模式中有一个（或多个）组合不存在不相邻的面，那么表明此个组合需 5 色区分，从而证明 4 色区分不成立。现举实例证明。

例证 1

图 2 是由 5 个面组成的图。从图 1 的 C_N^5 组合模式中知道，由 5 个面组成的图仅有“12345”一个组合。从图 2 的 C_N^2 组合模式中看出，图 2 的 5 个面中只存在 3 与 5 两个面不相邻。由此可见，图 2 的 5 个面中 3 与 5 两个面不相邻，可着同 1 色。验证结果，图 2 的“12345”5 个元素（即图 2 的 5 个面）仅需 4 色区分，其四色区分成立。

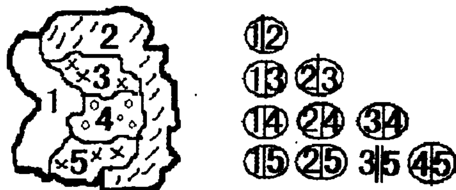


图 2 及其组合模式

例证 2

图 3 是由 6 个面组成的图。从图 1 的 C_n^5 组合模式中知道，由 6 个面组成的图共有 6 个组合（略）。

从图 3 的 C_N^2 组合模式中看出，图 3 的 6 个面中存在 3 对不相邻的两个面：2 与 4，2 与 5，3 与 5。

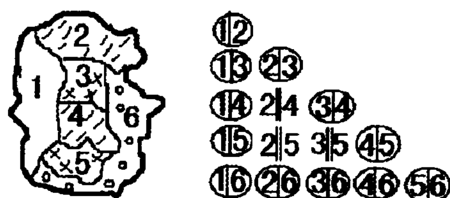


图 3 及其组合模式

现对图 3 的 6 个组合的 5 个元素予以验证：

“12345”“23456” 2 组 5 个元素均存在“2 与 4、2 与 5、3 与 5” 3 对不相邻的两个面，均仅需 3 色区分；

“12346” 5 个元素只存在“2 与 4” 1 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12356” 5 个元素存在“2 与 5、3 与 5” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12456” 5 个元素存在“2 与 4、2 与 5” 2 对不相邻的面，仅需 4 色区分；

“13456” 5 个元素只存在“3 与 5” 1 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分。

验证结果，图 3 的 C_N^5 组合模式中共有 6 个组合，其每个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，图 3 的 6 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立。

例证 3

图 4 是由 7 个面组成的图。从图 1 的 C_N^5 组合模式中知道，由 7 个面组成的图共有 21 个组合（略）。从图 4 的 C_N^2 组合模式中看出，图 4 的 7 个面中存在 6 对不相邻的两个面：1 与 5，2 与 6，3 与 5，3 与 6，3 与 7，4 与 7。现对图 4 的 21 个组合的 5 个元素进行验证：

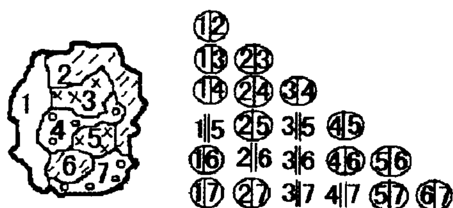


图 4 及其组合模式

“12345” 5 个元素存在“1 与 5、3 与 5” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12346” 5 个元素存在“2 与 6、3 与 6” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色区分；

“12347” 5 个元素存在“3 与 7、4 与 7” 2 对不相邻的两个面，仅需 4 色

区分；

“12356”5个元素存在“1与5、3与5、3与6”3对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“12357”5个元素存在“1与5、3与5、3与7”3对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“12367”5个元素存在“2与6、3与6、3与7”3对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“12456”5个元素存在“1与5、2与6”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“12457”5个元素存在“1与5、4与7”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“12467”5个元素存在“2与6、4与7”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“12567”5个元素存在“1与5、2与6”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“13456”5个元素存在“1与5、3与6”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“13457”5个元素存在“1与5、3与7”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“13467”5个元素存在“3与6、3与7、4与7”3对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“13567”5个元素存在“1与5、3与5、3与6、3与7”4对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“14567”5个元素存在“1与5、4与7”2对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“23456”5个元素存在“2与6、3与5、3与6”3对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“23457”5个元素存在“3与5、3与7、4与7”3对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“23467”5个元素存在“2与6、3与6、3与7、4与7”4对不相邻的两个面，仅需3色区分；

“23567”5个元素存在“2与6、3与5、3与6、3与7”4对不相邻的两个面，仅需3色区分；

"24567" 5 个元素存在"2 与 6、4 与 7" 2 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分；

"34567" 5 个元素存在"3 与 5、3 与 6、3 与 7、4 与 7" 4 对不相邻的两个面，仅需 3 色区分。

验证结果，图 4 的 C_N^5 组合模式中共有 21 个组合，其每个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，图 4 的 7 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立。

综图 2 至图 4 的证明，由 5 个面组成的图，其 C_N^5 组合模式中仅有 1 个组合，其 1 个组合的 5 个元素存在 1 对不相邻的两个面，其 5 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立；由 6 个面组成的图，其 C_N^5 组合模式中共有 6 个组合，其每一个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，其 6 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立；由 7 个面组成的图，其 C_N^5 组合模式中共有 21 个组合，其每一个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，其 7 个面仅需 4 色区分，其四色区分成立。

依照归纳法，得

结论　平（球）体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_N^5 组合模式中每一个组合的 5 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤4 色区分，其 N 个面仅需 4 色区分，因此，四色猜想成立。此证。

同样，环体（即轮胎体）表面的图仅需 5 色区分，则为五色猜想命题。经应用分划法求证到环体表面当被分划到第五步、被分划为 6 个面时，不能做到使 6 个面全相邻，必定出现不相邻的 2 个面。那么，据此，将五色猜想命题设定为一个从 N 个元素中任意取出 6 个元素为一个组合的整体（即为 C_N^6 组合模式），然后以现实中的图的 C_N^2 组合模式中"不相邻的两个面"为依据，对 C_N^6 组合模式中每一个组合的 6 个元素进行验证。验证结果表明，环体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_N^6 组合模式中每一个组合的 6 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤5 色区分，其 N 个面仅需 5 色区分，因此，五色猜想成立。

同样，丁环体表面的图仅需 6 色区分，则为六色猜想命题。经应用分划法求证到环体表面当被分划到第六步、被分划为 7 个面时，不能做到使 7 个面全相邻，必定出现不相邻的 2 个面。那么，据此，将六色猜想命题设定为一个从 N 个元素中任意取出 7 个元素为一个组合的整体（即为 C_N^7 组合模式），然后以现实中的图的 C_N^2 组合模式中"不相邻的两个面"为依据，对 C_N^7 组合模式中每一个组合的 7 个元素进行验证。验证结果表明，丁环体表面的图，不论其

面的数量是多少，其 C_N^7 组合模式中每一个组合的 7 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤6 色区分，其 N 个面仅需 6 色区分，因此，六色猜想成立。

同样，8 字连环体表面的图仅需 7 色区分，则为七色猜想命题。经应用分划法求证到环体表面当被分划到第七步、被分划为 8 个面时，不能做到使 8 个面全相邻，必定出现不相邻的 2 个面。那么，据此，将七色猜想命题设定为一个从 N 个元素中任意取出 8 个元素为一个组合的整体（即为 C_N^8 组合模式），然后以现实中的图 C_N^2 的组合模式中“不相邻的两个面”为依据，对 C_N^8 组合模式中每一个组合的 8 个元素进行验证。验证结果表明，8 字连环体表面的图，不论其面的数量是多少，其 C_N^8 组合模式中每一个组合的 8 个元素至少存在 1 对不相邻的两个面，均仅需≤7 色区分，其 N 个面仅需 7 色区分，因此，七色猜想成立。

3. 需说清楚的几个问题

其一，“$L=C_n^2$ 的 $n=S$”是“物体表面的图仅需着色种数”的基本定理，而本文的证明方法是验证此基本定理的正确方法。

其二，关于图的“不相邻的两个面”能否穷举之问题。对此，我的答案是，相对于物体表面可展示的图来说，根据数学的组合原理，图的“不相邻的两个面”肯定能穷举。因为，“不相邻的两个面”乃是 C_2^2 组合，穷举“不相邻的两个面”，即是穷举 C_N^2 组合模式中的各组组合（见图 5）。如由 5 个面组成的图，从图 5 看出，不论其面与面之间的关系多么复杂，其“不相邻的两个面”走不出 C_5^2 组合模式中的 10 个组合之内；如由 6 个面组成的图，其“不相邻的两个面”肯定走不出 C_6^2 组合模式中的 15 个组合之内，其余亦然。

N	C_N^2 组合模式中的各组组合	C_N^2
2	1‖2	$C_2^2=1$
3	1‖3 2‖3	$C_3^2=3$
4	1‖4 2‖4 3‖4	$C_4^2=6$
5	1‖5 2‖5 3‖5 4‖5	$C_5^2=10$
6	1‖6 2‖6 3‖6 4‖6 5‖6	$C_6^2=15$
7	1‖7 2‖7 3‖7 4‖7 5‖7 6‖7	$C_7^2=21$
…	……	……

图 5

其三，本人的研究结果表明，图的面的数量（N）与图的“不相邻的两个

面”对数两者关系成正比，即 N 越大，出现“不相邻的两个面”的对数就越多，甚至有可能出现某个组合的 m 个元素彼此之间均为“不相邻的两个面”之情况。这也就是说，N 越大，其图的“不相邻的两个面”着同一色的调节空间也就越大。

其四，四色猜想命题的破解，实际上是对“四色”这个“仅需着色种数”作出证明，并非是对在“四色”的前提下图的各面如何着色使之成立的证明。而笔者看到的有关四色猜想命题的证明，都属于后者此类的证明。就研究四色猜想命题而言，人们不仅未能走出“面的数量”这个“怪圈”，而且也未能跳出“如何着色”这个“误区”。

其五，地图的结构模式是 C_N^2 组合模式，绝对不是排列模式，地图的区域与区域之间的关系是组合关系，绝不是排列关系。因此，四色猜想命题不属于“真的机器证明之命题”。

2011 年 2 月 8 日（完稿）

（发表于《数学学习与研究》2011 年第 11 期）

有关四色猜想命题需说清楚的几个问题

1. 数学家斯蒂芬当年设计的“染色游戏”是失败的游戏

四川科学技术出版社于1985年出版的《古今数学趣闻》一书的《轰动全球的四色问题》一文中，曾讲到当年（19世纪）数学家斯蒂芬设计出的“染色游戏”一事。现将该段文字摘录如下：

为了让人们凭直觉在客观上证实这个猜想必然成立。数学家斯蒂芬还设计出风行一时的“染色游戏”。游戏由两人（或多人）参加，第一人任画一个闭合区域，由对手着色；着完色后，后者再画一个闭合区域，由对手（或是第三者）着色，如此循环进行。游戏规定，不论谁，若着完色并画出闭合区域后，迫使后继者非染第五种颜色不可时，便判谁为负。……据说，自倡导“染色游戏”以来，没有谁负过一次。

其实，经笔者对斯蒂芬设计出的“染色游戏”进行验证，结果表明，斯蒂芬设计出的“染色游戏”乃是失败的游戏。根据该“染色游戏”所讲的“甲先画一个闭合区域→乙着完色后再画一个闭合区域→甲着完色后又画一个闭合区域→乙又着完色后再画一个闭合区域……”如此循环进行的操作方法，游戏者在游戏进行到第六、七步之后，就有可能涂用第五种颜色，使游戏以失败而告终。请看下面作图证明：

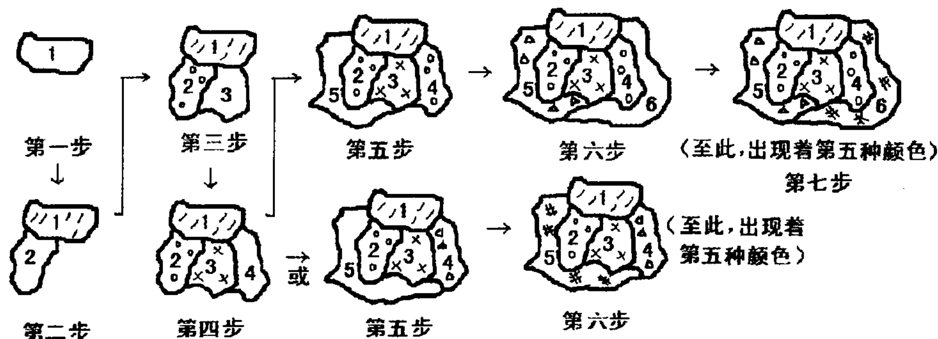


图 1　斯蒂芬设计出的“染色游戏”验证图

从图 1 看出，游戏进行到第五步时，对“4”面的着色有两种选择，一是“4”面与“2”面着同一色，二是“4”面独着一色。如是前者，则游戏进行到第七步对“6”面就要着第五种颜色；如是后者，则游戏进行到第六步对“5”面就要着第五种颜色。

可见，斯蒂芬设计出的“染色游戏”乃是失败的游戏。之所以是失败的游戏，其原因在于：其一，游戏着色的图是处于“边添区域边着色”动态之中的图；其二，不允许对着色结果作调整、更改。这失败的两个原因又从它的反面告诉我们，四色猜想命题能够成立的两个重要前提：前提一，着色的图必须是已完成、处于静态的图；前提二，着色过程中必须允许对前面的着色结果进行调整、更改。离开这两个前提，四色猜想就不能成立。

斯蒂芬设计的染色游戏虽然是失败的游戏，但它给了我一种设计的灵感。本人获得国家专利的“四色游戏拼图”（专利号为 *ZL*200320124089 · *X*），正是汲取斯蒂芬“染色游戏”的失败原因，应用自己的研究成果而设计出来的。毋庸置疑，本人设计出的“四色游戏拼图”，完全可以通过拼图游戏的方式，把四色猜想成功地演绎出来。它有力地证明四色猜想在实践中是成立的，张尔光的研究成果是可靠的。

2.　关于四色猜想命题能够成立之公式的问题

对这个问题，首先必须要明确的，四色猜想命题要人们破解的，实际上是对“四色”这个“仅需色数”作出证明，并非是对在“四色”的前提下图的各面如何着色使之成立的证明。基于这个观点，根据“图的 C_N^2 组合模式＝相

邻点点数+非相邻点点数”（即$C_N^2=y+z$）的定理，又根据《图的着色证明与图的着色定理》（下称《着色定理》）中一字状结构的图、梳子状结构的图、梯子状结构的图所反映出来的规律，从图的面数、图的C_N^2组合模式、图的相邻面的组合力C_n^2、相邻点点数、非相邻点点数五者关系入手，可求得四色猜想命题能够成立的数学公式。

第一步　求证相邻面的组合力C_n^2与相邻点点数y的关系的等式

例1　从一字状结构的图仅需用着色种数分析图表（见《着色定理》图12）看出，一字状结构的图，自其面数为2、相邻面的组合力为C_2^2起，每增加1个面则相应增加1个相邻点。这增加的相邻点点数“1”，正是“相邻面的组合力C_2^2的2（即C_n^2的n）减去1之差”乘于“图的组合模式C_N^2的N（即面数）减去相邻面的组合力C_2^2的2（即C_n^2的n）之差”的积，其公式为：

增加的相邻点点数$=(n-1)\times(N-n)=(2-1)\times(N-2)$

那么，一字状结构的图的相邻点点数y的公式：

$y=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]=C_2^2+(2-1)\times(N-2)$

例2　从梳子状结构的图仅需用着色种数分析图表（见《着色定理》图13）看出，梳子状结构的图，自其面数为3、相邻面的组合力为C_3^2起，每增加1个面则相应增加2个相邻点。这增加的相邻点点数“2”，正是“相邻面的组合力C_3^2的3（即C_n^2的n）减去1之差”乘于“图的组合模式C_N^2的N（即面数）减去相邻面的组合力C_3^2的3（C_n^2的n）之差”的积，其公式为：

增加的相邻点点数$=(n-1)\times(N-n)=(3-1)\times(N-3)$

那么，梳子状结构的图的相邻点点数y的公式：

$y=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]=C_3^2+(3-1)\times(N-3)$

例3　从梯子状结构的图仅需用着色种数分析图表（见《着色定理》图14）看出，梯子状结构的图，自其面数为4个、相邻面的组合力为C_4^2起，每增加1个面则相应增加3个相邻点。这增加的相邻点点数“3”，正是“相邻面的组合力C_4^2的4（即C_n^2的n）减去1之差”乘于“图的组合模式C_N^2的N（亦即面数）减去相邻面的组合力C_4^2的4（即C_n^2的n）之差”的积，其公式为：

增加的相邻点点数$=(n-1)\times(N-n)=(4-1)\times(N-4)$

那么，梯子状结构的图的相邻点点数y的公式：

$y=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]=C_4^2+(4-1)\times(N-4)$

综上证明，依照归纳法，图的相邻点点数公式为：

增加的相邻点点数$=(n-1)\times(N-n)$

相邻点点数的公式为：$y=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]$

根据“$y=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]$”这一公式得

$C_n^2=y-(n-1)\times(N-n)$

第二步　将图的非相邻点点数 z 变换为组合数学等式

从一字状结构的图仅需用着色种数分析图表（见《着色定理》图 12）看出，一字状结构的图，当其面数为 3、图的组合模式为 C_3^2 时，则图的非相邻点点数为 1，即为 C_2^2；当其面数为 4、图的组合模式为 C_4^2 时，则图的非相邻点点数为 3，即为 C_3^2；当其面数为 5、图的组合模式为 C_5^2 时，则图的非相邻点点数为 6，即为 C_4^2；当其面数为 6、图的组合模式为 C_6^2 时，则图的非相邻点点数为 10，即为 C_5^2……

从梳子状结构的图仅需用着色种数分析图表（见《着色定理》图 13）看出，梳子状结构的图，当其面数为 4、图的组合模式为 C_4^2 时，则图的非相邻点点数为 1，即为 C_2^2；当其面数为 5、图的组合模式为 C_5^2 时，则图的非相邻点点数为 3，即为 C_3^2；当其面数为 6、图的组合模式为 C_6^2 时，则图的非相邻点点数为 6，即为 C_4^2……

从梯子状结构的图仅需用着色种数分析图表（见《着色定理》图 14）看出，梯子状结构的图，当其面数为 5、图的组合模式为 C_5^2 时，则图的非相邻点点数为 1，即为 C_2^2；当其面数为 6、图的组合模式为 C_6^2 时，则图的非相邻点点数为 3，即为 C_3^2；当其面数为 7、图的组合模式为 C_7^2 时，则图的非相邻点点数为 6，即为 C_4^2……

根据一字状结构的图、梳子状结构的图、梯子状结构的图反映出来的规律和组合原理，可将图的非相邻点点数 z 用下面的公式来表示：

$Z=\dfrac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$（式中 N 表示面数，n 为 C_n^2 的 n）

已知，一字状结构的图的相邻面的组合力为 C_2^2，即 C_n^2 的 $n=2$，那么，一字状结构的图的非相邻点点数则：$z=\dfrac{(N-2)\times(N-2+1)}{2\times1}$

已知，梳子状结构的图的相邻面的组合力为 C_3^2，即 C_n^2 的 $n=3$，那么，梳子状结构的图的非相邻点点数则：$z=\dfrac{(N-3)\times(N-3+1)}{2\times1}$

已知，梯子状结构的图的相邻面的组合力为 C_4^2，即 C_n^2 的 $n=4$，那么，梯子状结构的图的非相邻点点数则：$z=\dfrac{(N-4)\times(N-4+1)}{2\times1}$

综上证明，依照归纳法，图的非相邻点点数 z 公式为：

$$z=\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}\quad 或\ z=C_{N-(n-1)}^{2}$$

第三步　根据上面求证到的公式，求证图的相邻面的组合力 C_n^2 与图的组合模式 C_N^2 的关系等式。

已知：$C_N^2=y+z$

又知：$y=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]$

$$z=\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$$

那么，“$C_N^2=y+z$”这一公式可表达为

$$C_N^2=C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]+\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$$

而 $C_n^2+[(n-1)\times(N-n)]=C_N^2-\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$

$$C_n^2=C_N^2-[(n-1)\times(N-n)]-\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$$

“$C_n^2=C_N^2-[(n-1)\times(N-n)]-\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$”这个公式便是 C_n^2 与 C_N^2 的关系等式

第四步　求证平体表面的图的相邻面的组合力极限数 C_4^2 与 C_N^2 的关系等式

已知：平体表面的图的相邻面的组合力极限数为 C_4^2，即 C_n^2 的 $n=4$，将此套入

“$C_n^2=C_N^2-[(n-1)\times(N-n)]-\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$”这个公式，并根据梯子状结构的图和环抱状结构的图的证明结果，得

平体表面的图的相邻面的组合力极限数 C_4^2 与 C_N^2 的关系等式：

$$C_4^2\geq C_N^2-[(4-1)\times(N-4)]-\frac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$$

根据“C_n^2 的 $n=S$”定理，所以，展现在平体表面的图，不论其面数是多少，仅需 4 色区分。

上述公式也可用图表来表示，如图 2 所示。

从图 2 的图表中，还发现这样一个规律：展现在平体表面的图，在遵循“循序逐增”原理的前提下，图的面数为 4、其相邻面的组合力为 C_4^2 之后，每增加 1 个面，则相应增加 3 个相邻点，也即是说，展现在平体表面的图，不论

其面数是多少，其平均每个面的相邻点点数不可能大于3，即：相邻点总数÷图的面数≤3或（C_N^2-Z）÷N≤3（式中Z表示非相邻点点数，N表示图的面数）。换言之，每一个面的“1”加上平均每个面的相邻点点数（亦即与之彼此之间均相邻的面数）之和不可能大于图的仅需色数S，即：$1+[(C_N^2-Z)\div N]\leqslant S$

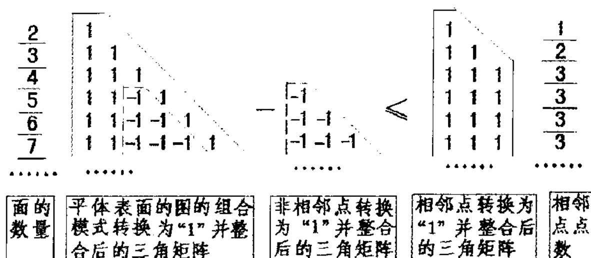


图2　平体表面的图的组合模式与相邻点、非相邻点关系等式图

这个公式同样表明，展现在平体表面的图，不论其面数是多少，仅需4色区分。

同理，依照上述的证明方法和“$C_n^2=C_N^2-[(n-1)\times(N-n)]-\dfrac{(N-n)\times(N-n+1)}{2\times1}$”“$1+[(C_N^2-Z)\div N]\leqslant S$”这两个公式，可得环体、丁环体、8字连环体表面的图的仅需色数的公式。

已知，环体表面的图的相邻面的组合力C_n^2为C_5^2，其图的仅需色数的公式则为：

$$C_5^2\geqslant C_N^2-[(5-1)\times(N-5)]-\frac{(N-5)\times(N-5+1)}{2\times1}$$

或$1+[(C_N^2-Z)\div N]\leqslant 5$（色）

根据“C_n^2的$n=S$”定理，所以，展现在环体表面的图，不论其面数是多少，仅需5色区分。

已知，丁环体表面的图的相邻面的组合力C_n^2为C_6^2，其图的仅需色数的公式则为：

$$C_6^2\geqslant C_N^2-[(6-1)\times(N-6)]-\frac{(N-6)\times(N-6+1)}{2\times1}$$

或$1+[(C_N^2-Z)\div N]\leqslant 6$（色）

根据“C_n^2的$n=S$”定理，所以，展现在丁环体表面的图，不论其面数是多少，仅需6色区分。

已知，8字连环体表面的图的相邻面的组合力C_n^2为C_7^2，其图的仅需色数的公式则为：

$$C_7^2\geqslant C_N^2-[(7-1)\times(N-7)]-\frac{(N-7)\times(N-7+1)}{2\times1}$$

或$1+[(C_N^2-Z)\div N]\leqslant 7$（色）

根据“C_n^2 的 $n=S$”定理，所以，展现在8字连环体表面的图，不论其面数是多少，仅需7色区分。

3. 物体表面的全相邻力和物体表面与物体表面之间的连接

我们已知，经应用分划法求得平（球）体表面的全相邻力最多只能做到使4个面全相邻（即全连接），环体表面的全相邻力最多只能做到使5个面全相邻（即全连接），丁环体表面的全相邻力最多只能做到使6个面全相邻（即全连接），8字连环体表面的全相邻力最多只能做到使7个面全相邻（即全连接）。为什么此四种物体表面的全相邻力各不相同？经本人对此四种物体表面进行分解为若干单个物体予以分析研究，从中发现，假设以平体表面的全相邻力为物体表面的全相邻力的原始起点，物体表面的全相邻力的提升，跟此物体表面与彼物体表面之间的连接有着密切联系。

如，环体表面的全相邻力（$L=5$）之所以比平体表面的全相邻力（$L=4$）多1个全相邻面，是在于平体表面两边端连接形成为环体表面。因此，环体表面比平体表面多1个层面连接线（以“单箭头实线→”表示），如图3所示。

再如，丁环体表面的全相邻力（$L=6$）之所以比环体表面的全相邻力（$L=5$）多1个全相邻面，是在于环体表面加接上了一个“半环体表面”使之成为丁环体表面。因此，丁环体表面比环体表面多1个层面连接线（以“双箭头实线”⟶⟶表示），如图3所示。

又如，8字连环体表面的全相邻力（$L=7$）之所以比丁环体表面的全相邻力（$L=6$）多1个全相邻面，是在于环体表面加接上了一个环体表面使之成为8字连环体表面。因此，8字连环体表面比丁环体表面多1个层面连接线（以“三箭头实线”⟶⟶⟶表示），如图3所示。

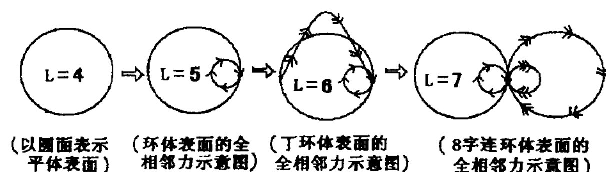


图3 平体、环体、丁环体、8字连环体表面的全相邻力示意图

可见，物体表面的全相邻力和物体表面与物体表面之间的连接有着密切联系。

又知，在《图的仅需着色种数与其区分等式和其他问题》一文中，我们对人的肢体与人的肢体之间的连接曾作这样的联想和推断，把人体作为连接体，把人的一只手拉住对方一只手作为一条连接线，假如 1 个人只有 1 只手，那么，形成了由 2 个人组成的整体，此整体的 2 个人需 2 色区分；假如 1 个人有 2 只手，那么，形成了由 3 个人组成的整体，此整体的 3 个人需 3 色区分；假如 1 个人有 3 只手，那么，形成了由 4 个人组成的整体，此整体的 4 个人需 4 色区分；假如 1 个人有 4 只手，那么，形成了由 5 个人组成的整体，此整体的 5 个人需 5 色区分……依此类推，人们可构造出需用百、万、n 种颜色区分的整体（图）来。

无疑，这个推断是成立的。现将人们的肢体之间连接形成的整体，联想为（或置换为）多环体结构的整体，显然，展现在这些复杂、更为复杂的多环体表面的图，其仅需色数实质上与人体的手增加而使连接形成整体的人数也相应增加一样，则为百、万、n 种颜色区分。基于这一事实，一百五十年前葛斯里发现的地图着色现象的最核心的关键词是“仅需”两字，并非是“四色”这个数字词，平（球）体表面的图仅需四色区分只不过是 n 种仅需色数现象中的一个实例而已。然而，令人遗憾的是，前人误读了地图着色现象，将“四色”理解为该现象的最核心的关键词，并把这一现象定之为“四色定理（四色猜想）”。更令人遗憾的是，后人至今还未能纠正这一误读。

4. 平体表面的图当其相邻面的组合力为 C_4^2 时，图的结构必是环抱状

经用分划法的求证，平体表面的图的相邻面的组合力的极限数之所以为 C_4^2，是在于受平体表面的全相邻力 L 为 4 的制约。本人在作图证明中发现了一个有趣现象：展现在平体表面的图，当其面数 $N=4$，且 4 个面彼此之间全相邻时，其图必形成为一部分面环抱另一部分面之状。这环抱状的图或是 1 个面环抱 3 个面（如图 4 所示），或是 2 个面环抱 2 个面（如图 5 所示），或是 3 个面环抱 1 个面（如图 6 所示）。从这三个图的表象看出，它

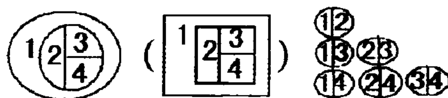


图 4 及其组合模式

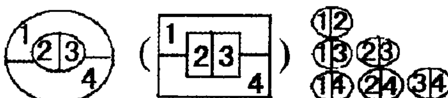


图 5 及其组合模式

们环抱状结构虽各不相同，但它们的本质相同，其面与面之间的相邻（组合）相同，其图的相邻面的组合力均为 C_4^2。

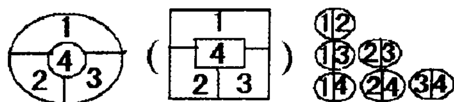


图 6 及其组合模式

这种环抱状结构的整体表达了三层意思：（1）平体表面的图，当其相邻面的组合力为 C_4^2 时，图的结构必是环抱状结构；（2）这个环抱状的“整体”是其组合元素为全相邻的“整体”，是图的相邻面的组合力处于“饱和状态”的“整体”。其后所增加的面，对于相邻面的组合力 C_4^2 这个数字来说，已毫无意义。就像一个容器装满了水，其后面所添的水，对于这个“满”字来说已毫无意义一样。同时也告诉我们：在研究四色猜想命题上，致力于“面的数量”的提升的研究，同样是毫无意义的。（3）这个“环抱状结构”意味着平体表面由“4 个全相邻面”组成的图到此为止，如续增第 5 个面，则必定出现不相邻面，图已不再是由全相邻面组成的整体，已转变为由全相邻面和非相邻面组成或由非全相邻面组成的整体。

2011 年 3 月 3 日（完稿）

（至本书出版，此文未发表）

地图与数学的组合、排列及三角矩阵

摘　要　本文从“整体元素循序逐增”这一地图形成的基本原理中，发现了地图、数学的组合及排列、三角数学之间的关系，找到了数学的组合、排列的“源”和“流”：“循序逐增”是地图与数学的组合、排列共有的基本原理，地图的结构模式——C_N^2 组合模式与数学的组合数、排列数，均可表达为三角矩阵。

关键词　地图　循序逐增　组合　排列　三角矩阵

笔者在《从地图的形成原理看图论证明方法的缺陷》一文（发表于《数学学习与研究》2011 年第 5 期）证明到，“整体元素循序逐增”是地图形成的基本原理，并遵循这一基本原理证明到地图的结构模式是 C_N^2 组合模式。笔者在研究四色猜想命题时进一步发现，地图的“循序逐增”的形成原理，也是数学的组合、排列共有的基本原理；地图的 C_N^2 组合模式与数学的组合数、排列数，均可以三角矩阵表达出来。

1.　地图的 C_N^2 组合模式是由“1（-1）”组成的三角矩阵

根据地图的 C_N^2 组合模式中每个相邻点和非相邻点均为 C_2^2 组合和“$C_2^2=1$”的原理，将相邻点和非相邻点分别转换为“1”“-1”来表示，并依照“循序逐增”的原理表达出来，地图的 C_N^2 组合模式实质是由“1”和“-1”组成的三角矩阵（如图 1）。

从三角矩阵中的“1”和“-1”所处的位置，可直接知道地图中哪两个面是相邻关系或是非相邻关系。如图 2 的三角矩阵中，第一列第一行的“1”，表明是“1”“2”两个面相邻，第二列第三行的“-1”，表明是“2”、“4”

两个面非相邻。

区域编号→ ↓	1	2	3	4	5	…
1	0					
2	1(-1)					
3	1(-1)	1(-1)				
4	1(-1)	1(-1)	1(-1)			
5	1(-1)	1(-1)	1(-1)	1(-1)		
…	……					

图 1　由“1”和“-1”组成的三角矩阵

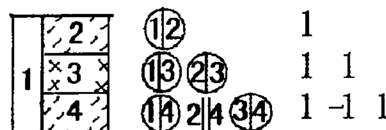


图 2 及其组合模式和三角矩阵

2.　“循序逐增”是数学的组合、排列共有的基本原理

“整体元素循序逐增”是地图形成的基本原理。事实证明：“整体元素循序逐增”，也是数学的组合、排列中客观存在的基本原理。

2.1　“循序逐增”是数学的组合的基本原理

图 3 是反映 C_n^2 组合过程的一个图表。从该图表看出，当组合元素仅有“1”一个元素时，不存在组合；当组合元素增加“2”这个元素后，便产生了“12”这个组合；当组合元素增加“3”这个元素后，便产生了“3”与“1”“2”的组合，即增加了“13、23”2 个组合，使之为 3 个组合；当组合元素增加“4”这个元素后，便产生了“4”与“1”　“2”“3”的组合，即增加了“14、24、34”3 个组合，使之为 6 个组合。可见，数学的组合是“循序逐增”的过程，“循序逐增”是其基本原理。

C_n^2	组合元素	C_n^2的组合情况	组合数
	1	不存在	0
C_2^2	1、2	12	1
C_3^2	1、2、3	12 13　23	3
C_4^2	1、2、3、4	12 13　23 14　24　34	6

图 3　C_n^2 组合过程反映图表

图 4 是 C_n^2 至 C_n^5 的“逐增数”和“累计数”（即得数）的统计表。从图 4 看出，C_n^2 的“累计数”就是 C_n^3 下一栏的“逐增数”；C_n^3 的“累计数”则是 C_n^4 下一栏的“逐增数”；C_n^4 的“累计数”则是的 C_n^5 下一栏的“逐增数”。可见，在数学的组合中，“循序逐增”的基本原理十分凸显。

n	C_n^2		C_n^3		C_n^4		C_n^5	
	逐增数	得数	逐增数	得数	逐增数	得数	逐增数	得数
2	1	1						
3	2	3	1	1				
4	3	6	3	4	1	1		
5	4	10	6	10	4	5	1	1
6	5	15	10	20	10	15	5	6
7	6	21	15	35	20	35	15	21
8	7	28	21	56	35	70	35	56
注：得数亦为累计数								

图 4　C_n^m “逐增数”“累计数”的统计表

2.2　“循序逐增”也是数学的排列的基本原理

图 5 是反映 P_n^2 排列过程的图表。从该图表看出，当排列元素仅有“1”一个元素时，不存在排列；当排列元素增加“2”这个元素后，便产生了“12、21”这 2 个排列；当排列元素增加“3”这个元素后，便产生了“3”与“1”“2”的排列，即增加了“13、31、23、32”4 个排列，使之为 6 个排列；当排列元素增加“4”这个元素后，便产生了“4”与“1”“2”“3”的排列，即增加了“14、41、24、42、34、43”6 个排列，使之为 12 个排列。可见，数学的排列是“循序逐增”的过程，“循序逐增”是其基本原理。

P_n^2	排列元素	P_n^2的排列情况	排列数
	1	不存在	0
P_2^2	1、2	12 21	2
P_3^2	1、2、3	12 21 13 31 23 32	6
P_4^2	1、2、3、4	12 21 13 31 23 32 14 41 24 42 34 43	12

图 5　P_n^2 排列过程反映图表

n	P_n^2		P_n^3		P_n^4		P_n^5	
	逐增数	得数	逐增数	得数	逐增数	得数	逐增数	得数
2	2	2						
3	4	6	6	6				
4	6	12	18	24	24	24		
5	8	20	36	60	96	120	120	120
6	10	30	60	120	240	360	600	720
7	12	42	90	210	480	840	1800	2520
8	14	56	126	336	840	1680	4200	6720
注：得数亦为累计数								

图 6　P_n^m “逐增数”“累计数”的统计表

图 6 是 P_n^2 至 P_n^5 的“逐增数”和“累计数”（即得数）的统计表。从图 6 看出，P_3^2 的“累计数”就是 P_3^3 的“逐增数”；P_4^3 的“累计数”则是 P_4^4 的“逐增数”；P_5^4

的“累计数”则是 P_5^5 的“逐增数”。可见，在数学的排列中，“循序逐增”的基本原理也十分凸显。

“循序逐增”，这是数学的组合、排列中客观存在的基本原理。它不仅体现在组合、排列的整体元素的增加过程之中，而且还体现在新增元素与前有元素形成组合、排列的空间扩展之中。认识和遵循这一基本原理，这对于研究和应用数学的组合、排列具有积极的意义。但是，笔者从一些有关数学的组合、排列的教科书中发现，人们忽视这一基本原理的存在，所举例证并非是遵循“循序逐增”这一基本原理来对数学的组合、排列进行诠释，而是以某个组合、排列实例的整体元素组合、排列情况来说明，有的教科书则以“倒序逐取”来诠释数学的组合、排列。其实，这都是有悖于“循序逐增”这一基本原理的。

3. 数学的组合数、排列数均可表达为三角矩阵

3.1 数学的组合数均可表达为由“1”组成的三角矩阵

数学中的组合，不论其取出元素的 m（>1）是几，其任何一个取出 m 个元素的组合，均为 C_m^m 组合。因“$C_m^m=1$”，又新增元素与前有元素的组合是循序逐增的过程，所以，任何一个组合数均是由“1”有序组成的三角矩阵。如图 7，是 C_n^2 的三角矩阵。从该图看出，矩阵中的“1”是“逐 1”增加的。

C_n^2	
C_2^2	1
C_3^2	1 1
C_4^2	1 1 1
C_5^2	1 1 1 1
C_6^2	1 1 1 1 1
…	……

图 7　C_n^2 的三角矩阵

图 8 是 C_n^3 的三角矩阵。从该图看出，矩阵中的“1”是循着 2、3、4……逐增的。其实，C_n^4、C_n^5……的三角矩阵中的“1”均是循着它的规律逐增的。正因为数学的组合存在这一规律，从中又发现了组合数与组合数之间的关系，即遵循循序逐增的原理，组合数的三角矩阵，还可转换为正三角矩阵来表达。

C_n^3	
C_3^3	1
C_4^3	1 1 1
C_5^3	1 1 1 1 1 1
C_6^3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
…	……

图 8　C_n^3 的三角矩阵

如图 9 所示，C_n^3、C_n^4、C_n^5 正三角矩阵是以 C_n^2 的正三角矩阵为模型，依照循序逐增的原理，将纵列数字逐加而得来的。

n	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5
2	1			
3	1 1	1		
4	1 1 1	1 2	1	
5	1 1 1 1	1 2 3	2 2	1
6	1 1 1 1 1	1 2 3 4	3 4 3	2 3
7	1 1 1 1 1 1	1 2 3 4 5	4 6 6 4	3 6 6
8	1 1 1 1 1 1 1	1 2 3 4 5 6	5 8 9 8 5	4 9 12 10

图 9　C_n^m 的组合数的正三角矩阵图

3.2　组合数与组合数之间的关系

分析前文图 9 的 C_n^m “逐增数”、“累计数” 的统计表，不难发现，组合数的循序逐增的原理，使组合数与组合数之间的关系存在着这一规律：如图 10 所示。

$C_2^2 + C_3^2 = C_4^3$

$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = C_5^3$

$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = C_6^3$

$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = C_7^3$

$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + \cdots\cdots = C_{n+1}^{2+1}$

图 10　C_n^2 组合数循序连加之和表达图

依照归纳法，可把这个规律以下列公式表达出来：

$C_{n1}^m + C_{n2}^m + C_{n3}^m + C_{n4}^m + C_{n5}^m + \cdots\cdots = C_{n+1}^{m+1}$　　（公式中 $m = n1$）

从图 9 的 C_n^m “逐增数”“累计数” 的统计表中，又发现组合数与组合数之间的关系还存在着这一规律：如图 11 所示。

$$
\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c} C_2^2 \\ + \\ (C_3^2+C_3^3) \end{array}\right\} = C_5^4 \\ + \\ (C_4^2+C_4^3)
\end{array}\right\} = C_6^4 \\ + \\ (C_5^2+C_5^3)
\end{array}\right\} = C_7^4 \\ + \\ (C_6^2+C_6^3)
\end{array}\right\} = C_8^4 \\ + \\ (\cdots\cdots+\cdots\cdots)
\end{array}\right\} = C_{n+2}^{(2+1)+1}
$$

图 11 C_n^2 与 C_n^3 组合数循序连加之和表达图

依照归纳法，可把这个规律以下列公式表达出来：

C_{n1}^{m} + （$C_{n2}^{m}+C_{n2}^{m+1}$） + （$C_{n3}^{m}+C_{n3}^{m+1}$） + （$C_{n4}^{m}+C_{n4}^{m+1}$） + （…… + ……） $=C_{n+2}^{m+2}$（公式中 $m=n1$，$m+1=n2$）

3.3 数学的排列数也是三角矩阵

图 12 是 P_n^2 的排列数的三角矩阵。从该矩阵看出，它是由“2”组成的三角矩阵。其实，矩阵中的这个“2”，乃是取出 2 个元素的“2”的排列数，即“$1\times2=2$”。而“2”的排列，是遵循循序逐增的原理来进行的有序排列。现将 P_n^2 的三角矩阵与前文图 7C_n^2 的三角矩阵相比较，就会发现 P_n^2 的三角矩阵的“2”的排放，与 C_n^2 的三角矩阵的“1”的排列相对应，这也就是说，P_n^2 的排列数与 C_n^2 的组合数存在这样的关系，即：$P_n^2=C_n^2\times(1\times2)$，亦即：$P_n^2=C_n^2\times2!$。

P_n^2	
P_2^2	2
P_3^2	2 2
P_4^2	2 2 2
P_5^2	2 2 2 2
P_6^2	2 2 2 2 2
…	……

图 12 P_n^2 的三角矩阵

图 13 是 P_n^3 的排列数的三角矩阵。从该矩阵看出，它是由“6”组成的三角矩阵。其实，矩阵中的这个“6”，乃是取出 3 个元素的“3”的排列数，即“$1\times2\times3=6$”，而“6”的排放，是遵循循序逐增的原理来进行的有序排放。现将 P_n^3 的三角矩阵与前文图 8C_n^3 的三角矩阵相比较，就会发现 P_n^3 的三角矩阵的“6”的排放，与 C_n^3 的三角矩阵的“1”的排放相对应，这也就是说，P_n^3 的排列数与 C_n^3 的组合数存在这样的关系，即：$P_n^3=C_n^3\times(1\times2\times3)$，亦即：$P_n^3=C_n^3\times3!$。

P_n^3	
P_3^3	6
P_4^3	6 6 6
P_5^3	6 6 6 6 6 6
P_6^3	6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
…	……

图 13 P_n^3 的三角矩阵

全排列数也可表达为三角矩阵，如图 14。从图 14 看出，全排列数的三角矩阵也是循序逐增的。

N!
2! 2 2 } 6
3! 2 2 } 24
4! 6 6 6 } 120
5! 24 24 24 24 } 720
6! 120 120 120 120 120
… ……

图 14 全排列数的三角矩阵

3.4 组合数与排列数之间的关系

从图 12、图 13 的证明中可知，排列数与组合数有着密切联系。已知

$P_n^2 = C_n^2 \times 2!$ $\qquad$ $P_n^3 = C_n^3 \times 3!$

依照归纳法，那么，排列数与组合数之间关系的公式为：

$P_n^m = C_n^m \times m!$（公式中 $n \geq m$，如 $n = m$，则 $P_n^m = C_n^m \times m! = n!$）

“$P_n^m = C_n^m \times m!$”，这个公式不仅简单明了、准确表达了排列数与组合数之间的关系，而且对全排列数“$n!$”也可从中得到简单明了的证明。

4. 自然数（$n > 1$）及其平方数与 C_n^2、“1”的三角矩阵

本人研究结果表明，任何一个自然数（$n > 1$）都可表达为两个“1”三角矩阵之差，其公式为“$n = C_{n+1}^2 - C_n^2$”；任何一个自然数（$n > 1$）的平方数都可表达为由“1”组成的方阵，其公式为“$n^2 = C_n^2 + C_{n+1}^2$”。

4.1 任何一个自然数（$n > 1$）都可表达为两个“1”三角矩阵之差

(C_3^2) − (C_2^2) = (2)

图 15

(C_4^2) − (C_3^2) = (3)

图 16

(C_5^2) − (C_4^2) = (4)

图 17

从图 15 看出，C_3^2 的三角矩阵减去 C_2^2 的三角矩阵，其差为 2，亦即 $C_3^2 -$

$C_2^2=2$。而 C_3^2 可表达为 C_{2+1}^2，又 $C_{2+1}^2-C_2^2=2$。

从图 16 看出，C_4^2 的三角矩阵减去 C_3^2 的三角矩阵，其差为 3，亦即 $C_4^2-C_3^2=3$。而 C_4^2 可表达为 C_{3+1}^2，又 $C_{3+1}^2-C_3^2=3$。

从图 17 看出 C_5^2 的三角矩阵减去 C_4^2 的三角矩阵，其差为 4，亦即 $C_5^2-C_4^2=4$。而 C_5^2 可表达为 C_{4+1}^2，又 $C_{4+1}^2-C_4^2=4$。

综图 15 至图 17 的证明，已知

$2=C_{2+1}^2-C_2^2$，即 $n=C_{n+1}^2-C_n^2$；

$3=C_{3+1}^2-C_3^2$，即 $n=C_{n+1}^2-C_n^2$；

$4=C_{4+1}^2-C_4^2$，即 $n=C_{n+1}^2-C_n^2$。

依照归纳法，得任何一个自然数（$n>1$）均可表达为两个“1”三角矩阵之差（即 2 个 C_n^2 组合数之差），其公式为：$n=C_{n+1}^2-C_n^2$

4.2 任何一个自然数（$n>1$）的平方数均可表达为由“1”组成的方阵

任何一个自然数（$n>1$）的平方数均可表达为由“1”组成的方阵，又任何一个由“1”组成的方阵均是由 2 个“1”的三角矩阵组成。因此，任何一个自然数（$n>1$）的平方数均可表达为两个“1”的三角矩阵，即均可表达为两个 C_n^2 组合数之和。

图 18　2^2 的方阵图

图 18 是 2^2 的方阵图，由 C_2^2 的三角矩阵和 C_3^2 的三角矩阵组成，亦即 $2^2=C_2^2+C_3^2$。而 C_3^2 可表达为 C_{2+1}^2，又 $2^2=C_2^2+C_{2+1}^2$。

图 19　3^2 的方阵图

图 19 是 3^2 的方阵图，由 C_3^2 的三角矩阵和 C_4^2 的三角矩阵组成，亦即 $3^2=C_3^2+C_4^2$。而 C_4^2 可表达为 C_{3+1}^2，又 $3^2=C_3^2+C_{3+1}^2$。

图 20 是 4^2 的方阵图，由 C_4^2 的三角矩阵和 C_5^2 的三角矩阵组成，亦即 $4^2=C_4^2+C_5^2$。而 C_5^2 可表达为 C_{4+1}^2，又 $4^2=C_4^2+C_{4+1}^2$。

图 21　4^2 的方阵图

综图 18 至图 20 的证明，已知

$2^2=C_2^2+C_{2+1}^2$　　即 $n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$

$3^2=C_3^2+C_{3+1}^2$　　即 $n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$

$4^2=C_4^2+C_{4+1}^2$　　即 $n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$。

依照归纳法，那么，任何一个自然数（$n>1$）的平方数均可表达为两个“1”三角矩阵之和（即2个C_n^2组合数之和），其公式为：$n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$。

综图15至图20的证明，已知$n=C_{n+1}^2-C_n^2$，$n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$，那么，得：$(C_{n+1}^2-C_n^2)\times(C_{n+1}^2-C_n^2)=C_n^2+C_{n+1}^2=n^2$。

又，根据“$n=C_{n+1}^2-C_n^2$”和“$n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$”，得任何一个自然数（$n>1$）的3次方均可表达为：$n^3=(C_{n+1}^2-C_n^2)\times(C_n^2+C_{n+1}^2)$。

又，根据“$n^2=C_n^2+C_{n+1}^2$”，得任何一个自然数（$n>1$）的4次方均可表达为：$n^4=(C_n^2+C_{n+1}^2)\times(C_n^2+C_{n+1}^2)$。

以上发现，尤其是一些公式也许不属于笔者的新发现，而是属于前人“已发现”。但是，本人发现的意义是在于寻到了地图及其结构模式在数学上的“根”，找到了自然数以及数学的组合、排列的“源”和“流”。所谓“源”，是指一切自然数以及组合数、排列数皆源自于“1”；所谓“流”，是指一切自然数以及组合数、排列数皆形成于“循序逐增”原理。甚至本人还有这样无知的联想：这些发现对于人们另辟蹊径破解“哥德巴赫猜想”“费马大定理”也许会有益的启示。

2011年3月28日（完稿）

（发表于《数学学习与研究》2011年第19期）

张尔光在研究四色猜想方面的趣事记

☆☆☆1　1986 年 5 月 27 日上午，我在韶关市风度路新华书店买了一本四川科学技术出版社出版的新书《古今数学趣话》。对书中彭塞之写的《轰动全球的四色问题》和《摘取皇冠上的明珠》两篇文章很感兴趣。此后，本人成为四色猜想研究和素数研究的兴趣者。

☆☆☆2　本人看完《轰动全球的四色问题》一文，第一感觉四色猜想命题跟图的面与面之间的相互连接的有限性有关，经反复作图证明，得出结论：地图之所以仅需 4 色区分，在于地图只能做到 4 个区域（即国家，下同）彼此之间相互连接，不可能做到 5 个区域彼此之间相互连接。当时，因自己在数学知识上的无知，便从哲学的有限性这个角度和大量的图例来论证。于 1987 年 3 月底完成第一版本稿《四色猜想之证明》，自己也不知天高地厚将此稿寄发国家数学期刊。当然，如此稿件是不可能被刊用的。

☆☆☆3　1989 年至 1998 年，本人的主要精力用于新闻写作上，对四色猜想研究基本停了下来，只是偶然偷闲作图研究。

☆☆☆4　1998 年 9 月，本人从浈江区人大机关调到韶关市人大机关工作。进入 2000 年后，对四色猜想研究的兴趣又逐渐浓了起来。这一年，经作图验证斯蒂芬当年设计的染色游戏是失败的游戏，认为其失败的原因是在于这个游戏是处于边作图边着色的动态之中。

☆☆☆5　2003 年 12 月 20 日，本人受斯蒂芬的染色游戏的启发而设计的“四色猜想游戏拼图”申报国家专利。于 2005 年 6 月 15 日获国家知识产权局授权（名称改为“四色游戏拼图”），专利号为 ZL200320124089. X。

☆☆☆6　2003 年 12 月，对一幅有 1006 个区域组成的平面图进行四色区分和着色，仅用了 26 个小时完成区分和着色（2003 年 12 月 29 日 23 时完成）。

☆☆☆7　2003 年，在已知不能做到五个面彼此之间相互连接后，产生

“五条线彼此之间能否做到相互连接”的奇想，经作图实证发现在平体表面照样不能做到“五条线彼此之间相互连接”。根据新的发现，对第一版文稿进行大修改，写成第二版文稿《四色猜想之证明》，2004 年 1 月 28 日完稿（抄正）。

☆☆☆8　2004 年，发现在着色过程中，4 色展现出来的有 24 种着色方案，即是“1×2×3×4＝24”这个规律，并认为这种规律在数学上有它的“叫法（即名称）”。后向时任韶关市第十届人大常委会委员、韶关学院副院长刘荣万教授请教，才得知“1×2×3×4＝24”这种规律叫做排列数“4!”。尝试应用“表格式”和“面与面之间着色搭配方式”对四色猜想证明，对第二版文稿进行较大修改，写成第三版文稿《四色猜想之证明》，2004 年 6 月 8 日完稿（抄正）。

☆☆☆9　2005 年，应用自己发现的着色搭配方案的计算方法，对一幅展现在正方体表面的有 108 个区域组成的地图进行四色区分和着色，获得成功。

☆☆☆10　2005 年，根据自己对四色猜想命题的一些新认识，对第三版文稿进行一次认真的修改，写成第四版文稿《四色猜想之证明》，2005 年 3 月 28 日完稿（抄正）。出自于对自己的知识产权的保护，于 2005 年 10 月 11 日通过韶关雷明专利事务所，向广东省版权保护联合会进行作品著作权登记（作登字 19－2005—A—0066 号）。

☆☆☆11　2005 年，本人应用实物对环体（即轮胎体）表面作图着色区分，发现环体表面的图仅需 5 色区分，否定了《数学万花镜》一书说的环体表面的图需 7 色区分的“猜想”。本人用电话告知王教授。王教授说已有五色定理。在这瞬间，本人的脑海闪现出对四色定理、五色定理产生质疑的“大问号”，“物体表面是一个重要因素”这个推断已深深地刻录在我的脑海里。此后，把对四色猜想研究的触角延伸到环体、丁环体、8 字连环体等“图的仅需着色种数”的研究。经实物作图求得：环体表面的图仅需 5 色区分；丁环体表面的图仅需 6 色区分；8 字连环体表面的图仅需 7 色区分。事实印证了本人关于“物体表面是四色猜想命题的一个重要因素”的推断是正确的。于是，本人将自己的新发现和推断，写成《四色定理经不起逻辑推理》一文。在该文强调指出，人们可构造出需用百、万、亿种颜色区分的图（实体）来。

☆☆☆12　2005 年 10 月 26 日韶关日报“韶城新闻”版头条新闻以《张尔光破译“四色猜想”密码——其发明的“四色游戏拼图”获国家专利证书》为题，报道了本人在研究四色猜想方面做出的成绩。

☆☆☆13　2005 年 10 月，对第四版文稿《四色猜想之证明》进行修改，

写成《关于四色猜想为什么能够成立的奥秘》一文。同月15日，本人将自己的发现以及六大事例可证明本人发现四色猜想的奥秘，写信向广东省主要领导汇报，同时寻求数学研究机构帮助。此信转广东省科技厅。该厅于2006年7月13日复函（粤科信访〔2006〕14号《关于张尔光同志“四色猜想”的复函》）于我：一、你对“四色猜想”的证明只是例证；二、建议你可将证明写成论文，投往《中国科学》等权威期刊。

☆☆☆14 2006年6月，根据王教授提出的“要学一点图论知识”的建议，本人出差到广州时，在天河书城购买了“21世纪高等院校教材”《图论》一书。本人虽然看不懂《图论》的一些公式，但本人发现就四色定理的证明而言，《图论》的好些观点以及证明方法与本人的发现以及证明方法相去甚远。

☆☆☆15 2006年9月，本人就对在地图着色搭配中发现的规律，拟以一筐苹果分为若干堆有几种分法的数学题，通过我爱人向其所在单位近年招进来的大学毕业生请教。得知类似于这样的数学题是属于组合数学的范畴，属于高中数学的内容。

☆☆☆16 2005年至2007年间，本人试图将面置换为线和连接点（亦即相邻点）来证明四色猜想，经作图证明，发现“一个图不论其面的数量是多少，其图的相邻点点数 ÷ 图的面的数量 ≤3”，认定此是四色猜想能够成立的重要依据。

☆☆☆17 2007年7月中旬（13日至15日），本人应邀参加了“第六届科学家论坛”，拙作《四色定理经不起逻辑推理》为参会论文。在北京期间，我购买了《数学论文写作概论》一书。此书对我撰写数学论文有很大帮助。根据该书关于数学论文写作的要求，对《四色定理经不起逻辑推理》（原是按政治论文格式来写）进行认真的修改，并将文章题目改为《四色猜想研究应走出“面的数量”怪圈》。此文荣获“第六届科学家论坛自主创新学术成果优秀奖”，并被中国重要会议论文全文数据库全文收录。这给本人将自己的研究成果写成数学论文增强了信心。

☆☆☆18 2007年8、9月间，本人想起20世纪七八十年代高中读书、部队服役期间在墙上涂写标语中横与点，又联想四色猜想命题中的面、点、线，认为墙体上的线（横线）与点，从另一个角度来说也是面，这正是色的拓扑作用的结果。本人从这个现象中发现了“色的拓扑作用”，发现了在色的拓扑作用下，面与点与线、物体表面与面具有等价关系，可以置换。

☆☆☆19 参加“第六届科学家论坛”之后，本人致力于将自己的研究

成果写成数学论文、并数次投稿数学期刊寻求发表，同时积极主动寻求与数学专家、学者的合作，无果。此时我有点迷惘，但没有选择放弃，觉得自己仅是从实例和说理性的角度来证明还是欠缺，应当充实点数学知识。于是，我翻找了我女儿的高中数学书，花点时间和精力认真钻研组合数学，基本弄懂了组合、排列的基本原理。

☆☆☆20　2007 年 12 月，本人发明“边界线添画相邻点的证明方法”。应用此方法作图证明时，发现将相邻点和非相邻点依序排放成三角形时，图的结构模式是 C_N^2 组合模式。这个发现令我兴奋不已。

☆☆☆21　2008 年，本人试图用数学的组合知识来证明四色猜想。从作图证明中，发现图的“组合形成”原理——整体元素循序逐增的原理和“分划整体”原理。并根据“分划整体”原理创立了分划法。应用分划法求得不同物体表面的全相邻力。进而发现“物体表面的全相邻力”与“图的相邻面的组合力”与“仅需着色种数”三者关系的定理“$L = C_n^2$ 的 $n = S$”。这为“为什么不同物体表面其仅需着色种数有的相同有的不相同”的问题找到了答案，也为“为什么平体表面的图仅需 4 色区分”的问题（即四色猜想命题）找到了答案。

☆☆☆22　2008 年 8 月，根据王教授的“你可与当地大学院校联系合作事宜”的建议，主动写信给韶关学院两位主要领导。于 2008 年 9 月 13 日，与该学院数学与信息科学学院主要领导取得联系。但这种联系一直处于交流状态，难于向合作迈进。

☆☆☆23　2009 年 2 月 22 日的不眠之夜，本人发现一字状结构的图、梳子状结构的图、梯子状结构的图的“相邻点与相邻面组合力之关系”的计算等式。

☆☆☆24　2009 年，本人又多次将自己的论文投稿数学期刊，均被退稿。后来，上网查找有无适合自己投稿的期刊，认定《科技资讯》可作为尝试投稿的期刊，同时改变写作方法——“一个大观点为一篇文章”，以说理性为主的文章《破解四色猜想命题的切入点在哪里》“打头炮”。此文被《科技资讯》2009 年第 32 期刊用。此后，又将其他大观点写成若干篇学术论文往国家级期刊《科技创新导报》投稿，均被刊用。

☆☆☆25　2010 年 4 月 24 日（星期六）上午，本人受韶关学院数学与信息科学学院的邀请，参加了该院举办的“四色猜想的相关问题学术研讨会”。研讨会由院长简国明教授主持，本人介绍了自己在研究四色猜想方面的有关主要成果，于江明、郑华、李银、李萃萃等老师参加了研讨会。大家就相关问题

进行了讨论、交流。也许是我讲的不够明白，也许是老师们认可的是“图论”的理论，这几位老师还是没能认同本人的主要观点。此外，在这次研讨会上，本人就自己在研究四色猜想过程中发现的有关数学的组合、排列几个等式问题，向老师们进行请教。本人给出的是根据其规律性并应用“归纳法”而求得的证明结果，老师在黑板上所作的证明是繁杂的演算过程。由此，本人对自己发现的该“规律”产生了“也许是一种新发现”的想法。

☆☆☆26　研讨会之后，根据学院老师的意见，本人将图论两点连线的证明方法的点、线注入本人的“组合说”的内涵。经应用此证明方法（当然此证明方法与图论的证明方法有着本质不同）证明，图的模式是 C_N^2 组合模式，证明结果与边界线添画相邻点的证明方法相一致。同时，发现客观事物中的连接现象都是组合（即都可用组合模式表达出来），发现“图论”应用“两点连线的证明方法”存在的缺陷。

☆☆☆27　2010 年 5 月，发现图的仅需着色种数的区分等式。

☆☆☆28　2010 年 8 月下旬，本人对已发表的论文整理为汇集版《张尔光的“组合说”与图的着色定理——兼对四色猜想命题的证明》，通过韶关雷明专利事务所，向广东省版权保护联合会进行作品著作权登记。作品登记号为 19 -2010 -00109。

☆☆☆29　在汇集版登记后，本人对已发表的论文以及证明思路进行认真地梳理，着重于对“证明”方面存在有什么不够完善的地方，还有哪些没有予以说清楚的问题进行慎思、自问。本人认为，对“仅需色数定理”还漏缺其验证方法，本人的证明方法与“图论”的证明方法两者谁对谁错的问题应当予以说清楚，还应将自己的在研究四色猜想命题过程中对数学的组合、排列及三角矩阵的一些发现写成学术论文。

☆☆☆30　2010 年 12 月上旬，我收到山西省盂县党校张彧典老师寄来的快递信件，里面有《四色问题探秘》（张彧典著）一书和一封彧典老师写给我的信。彧典老师与我素不相识，是因四色问题他上网才得知我张尔光这个名字的。彧典老师在来信中讲到其所在县科技行政部门专门为其组织一个研究四色问题成果评价会，会议一切费用由政府支付，望我能参加。因本人不是数学专家，自知不够资格，我没参加评价会。但盂县科技部门能如此重视彧典老师的研究成果，我甚为羡慕。彧典老师的来信，使我萌生了将自己的学术论文汇集出书的想法。

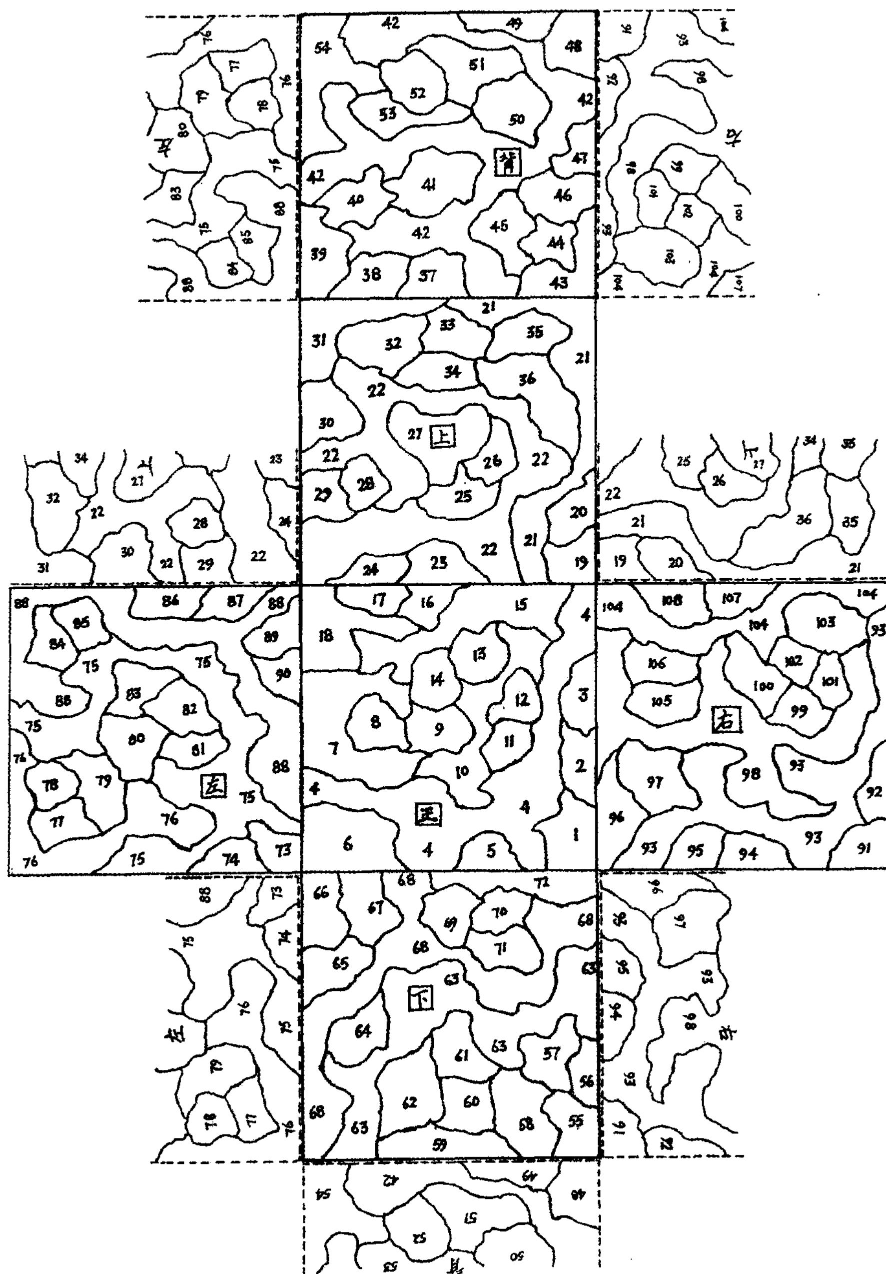
☆☆☆31　进入 2011 年，我试图将学术论文投稿至数学期刊，目的是验证自己的学术论文在格式和论证方面有无达到数学论文的规范要求，同时希望

本人的研究成果能在数学界产生影响。拙作《从地图的形成原理看图论证明方法的缺陷》（第5期）、《验证“图的仅需色数定理”的证明方法》（第11期）、《地图与数学的组合、排列及三角矩阵》（第19期）均被《数学学习与研究》刊用。6月中旬，本人从《数学学习与研究》（第11期）样刊中，才发现自己以前写的论文中对组合、排列符号及公式的书写不那么规范，脸显愧色。

☆☆☆33　2011年7月，本人将在期刊发表的学术论文以及研究成果再次进行整理，汇编为书——《张尔光研究四色猜想命题论文集》，并进行作品著作权登记。

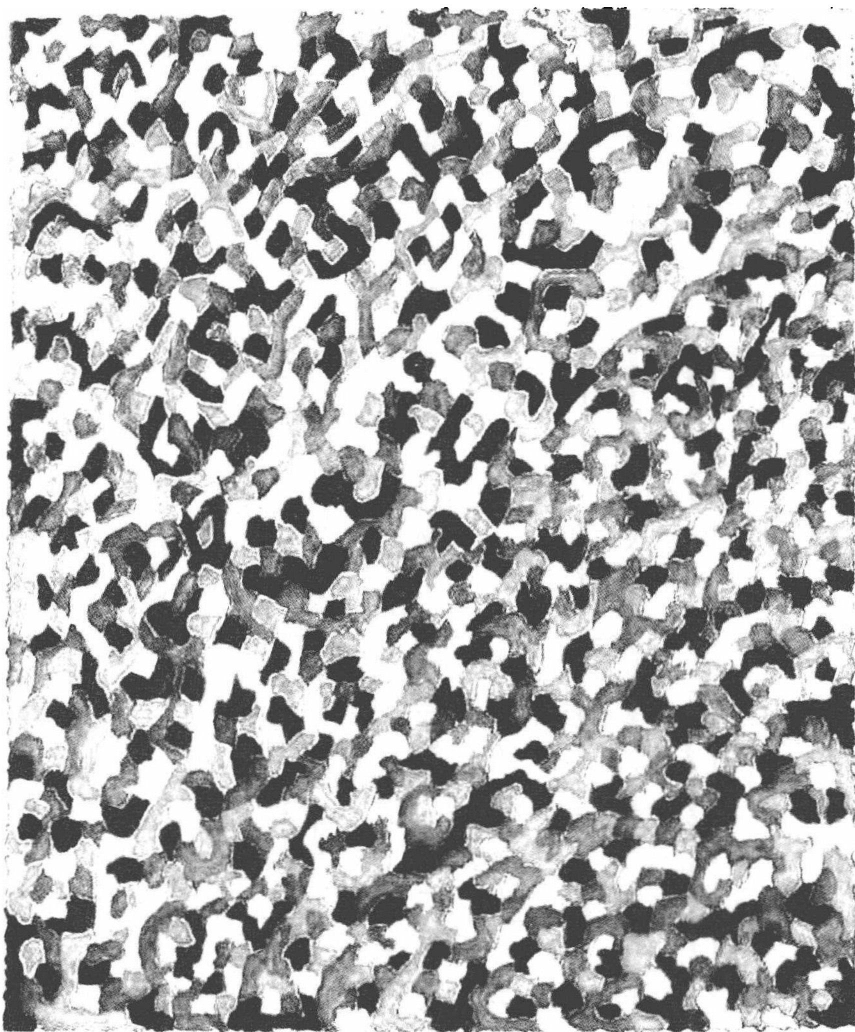
2010年8月18日追记

2011年6月18日补记



2005 年，本人应用自己发现的着色搭配方案的计算方法，对此幅展现在正方体表面由 108 个区域组成的地图进行四色区分和着色，获得成功。四色猜想命题的研究者，如有兴趣，不妨一试。但愿你能获得成功。

千个区域四色区分图



说明：本图共1006个区域。从区分到着完色仅用了26个小时。于2003年12月29日23时完成

实用新型专利证书

证书号　第705920号



实用新型名称：四色游戏拼图

设计人：张尔光

专利号：ZL 2003 2 0124089.X

专利申请日：2003年12月20日

专利权人：张尔光

授权公告日：2005年6月15日

本实用新型经过本局依照中华人民共和国专利法进行初步审查，决定授予专利权，颁发本证书并在专利登记簿上予以登记。专利权自授权公告之日起生效。

本专利的专利权期限为十年，自申请日起算。专利权人应当依照专利法及其实施细则规定缴纳年费。缴纳本专利年费的期限是每年12月20日前一个月内，未按照规定缴纳年费的，专利权自应当缴纳年费期满之日起终止。

专利证书记载专利权登记时的法律状况。专利权的转移、质押、无效、终止、恢复和专利权人的姓名或名称、国籍、地址变更等事项记载在专利登记簿上。

专利号 

局长 王景川



第1页（共1页）

荣誉金匾

荣誉金匾

张尔光 同志：

您提交的《四色猜想研究应走出"面的数量"怪圈》一文，荣获"第六届中国科学家论坛自主创新学术成果"优秀奖。

特颁此匾



全国科技振兴城市经济研究会

二〇〇七年六月

荣誉证书

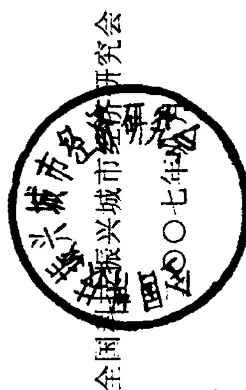
荣誉证书

张尔光 同志：

您提交的《四色猜想研究应走出“面的数量”怪圈》一文，

荣获“第六届中国科学家论坛自主创新学术成果” 优秀奖

特颁此证



全国科技振兴城市经济研究会

二〇〇七年

收录证书

收 录 证 书

张尔光　　同志：

您向第六届中国科学家论坛提交的《四色猜想研究应走出“面的数量”怪圈》一文，经论坛组委会推荐，《中国知识资源总库》编辑委员会审核同意，被中国重要会议论文全文数据库(China Proceedings of Conference full-text Database)全文收录。

特发此证



全国科技振兴城市经济研究会

二〇〇七年七月



我的真诚表白

——卷末语

2011 年 6 月，拙作《地图与数学的组合、排列以及三角矩阵》已被确定安排在《数学学习与研究》2011 年第 19 期发表。至此，本人对四色猜想命题的研究（确切地说对地图着色现象的研究）算是告一段落。坦诚地说，我对四色猜想命题的研究虽有 25 年漫漫之长，但说到底还是一位兴趣者。正因为如此，本人的研究成果要得到数学界的认可，同样需经历一段漫长之路，甚至会像哥白尼“日心说”得到科学界认可那样漫长。

坦诚地说，我的数学知识只具有初中水平。在我上世纪七十年代初念的高中数学，没有组合数、排列数的内容。因此，直到 2002 年之前，对于什么是组合数、排列数，我完全无知。正因为本人不具备研究数学命题的数学理论底子，所以，我对四色猜想命题的研究，完全是凭着一种兴趣，与他人走的“数学→研究→破解”之路相比，我走的却是“研究→数学→破解”这样一条特别之路。人们从我的“趣事记”和学术论文中可看出，对四色猜想命题的研究，我是以哲学的角度从对地图的面与面之间连接的有限性研究开始的，注重对命题的种种现象的研究，从事物现象中发现其规律性的东西，又从其规律性的东西中才知道

与之相关的数学知识，然后才去学习、掌握这些数学知识，最后应用这些数学知识对命题作出论证。

坦诚地说，正因为本人不具备研究数学命题的数学理论底子，所以，在研究四色猜想命题上，我没有受前人研究理论的束缚，我能跳出“面的数量”怪圈，走出“图的各面如何着色”的误区。总之，一直坚持走自己的研究之路。

坦诚地说，在研究四色猜想命题上，我的最重要的研究成果在于，一是发现了地图的形成原理，二是根据地图的形成原理创立了“分划法”。本人应用排除法将“面数”排出“图的色数”的决定性因素之外，以地图的形成原理为切入点，从中发现了面与面之间的关系是组合关系、地图的结构模式是组合模式，根据地图的形成原理创立了“分划法”；我应用“分划法”，既找到了“物体表面的图的仅需色数定理”，又找到了验证这个定理的证明方法。此外，我透过地图的形成原理发现了数学的组合数、排列数共有的基本原理，发现了数学的组合数、排列数与自然数及三角矩阵之间的一系列关系。因此，可以说地图的形成原理是数学的一把“金钥匙”，它使我打开了四色猜想命题奥秘的大门。

数学家K·阿沛尔说过：“四色问题的一个简短证明有朝一日会被发现，甚至被一位因此而一举成名的天才高中生所发现。”以笔者的理解角度来看，阿沛尔这段话透露出这么一层意思：破解四色问题并不需要很高深的数学知识，四色问题是一个应用高中数学知识就可破解的问题。基于这种理解，又可以说，破解四色问题，数学知识不是第一重要的知识能力。那么，什么才是破解四色问题的第

一重要的知识能力呢？事实表明，观察事物能力和分析事物能力，才是破解四色问题的第一重要的知识能力。这是由四色问题来自于地图着色现象这个事实所决定的。这个事实告诉我们，四色猜想命题是一个典型的被事物现象遮盖住事物本质的命题。基于这种观点，又可以说，要破解四色猜想命题，首先要从“地图着色现象”中找到它的本质及其规律性的东西，这是不可绕过去的前提；其次才是如何应用数学知识作出证明的问题。

如果说，某一天我的研究成果得到了数学权威机构或数学界的认可。我坦言，我不是一位数学天才。只能客观地说，我之所以能够破解四色猜想命题，不只在于我具有较高的观察事物能力和分析事物能力，还在于我具有较高的思维能力和逻辑推理能力，是一个勤于思考和善于思考的人，善于从复杂的事物现象中做“去伪存真”的工作，在“异中求异、异中求同、同中求异、同中求同”的比较中去寻找规律性东西，发现了这个命题的奥秘。因此，我不是一位数学天才者，只是一位善于发现者。对于我的成功，我要真诚地感谢所有给予我支持和帮助的人。

在此，要予以说清楚的，细心的读者也许会发现，在本人发表的文章中，有一些提法，有一些观点，发表在后的文章与前面的文章不那么一致，甚至有点前后矛盾。比如，“图的模式”与“图的结构模式”这两个概念，发表在前的文章是称“图的模式”，发表在后的文章是称“图的结构模式”；又比如，“图的着色定理”与“图的仅需色数定理”这两个提法，发表在前的文章称“图的着色定理”，而发表在后的文章是称“图的仅需色数定理”；又比如，关于“组合数”与“排列数”的区别问题，发表在后

的文章与前面的文章说法完全不同……对于这些“不一致”，应当以发表在后的文章为准。因为，出现这些“不一致”，这里面有两个原因，一方面，对事物的认识有一个由表及里、由浅入深的过程；另一方面，因出自于对自己研究成果的保护之需要，本人有意为之。此外，在整理、出版本文集时，我对发表的原作的个别地方进行了必要修改。对此，有请理解和谅解。

坦诚地说，因本人只是四色猜想命题研究的一位兴趣者，不是数学学者，加上本人长期从事机关文字工作，因此，本人所撰写的这十几篇四色猜想命题研究的学术论文，肯定存在不那么规范的地方，字里行间中免不了夹杂有政治论文那种语气和“腔调”。对此，诚心欢迎老师们赐教、指正。

作者：张尔光

2011年6月28日

[General Information]
书名=四色猜想命题——张尔光研究文集
作者=张尔光著
页数=140
SS号=13186472
DX号=
出版日期=2012.04
出版社=中央编译出版社